

Р.О. РЕЗАЕВ^{1,2}, канд. физ.-мат. наук (rezaev.roman@gmail.com);
А.А. ДМИТРИЕВ², инженер; Д.В. ЧЕРНЯВСКИЙ¹, канд. физ.-мат. наук

¹ IFW Institute for Theoretical Solid State Physics (Helmholtzstraße 20, 01069 Dresden, Germany)

² Томский политехнический университет (634050, Томск, пр. Ленина, 30)

Применение вероятностных подходов для построения моделей «состав—свойство». Часть I (Теория)

В цикле из двух статей обсуждается концепция построения вероятностных моделей свойств бетонных смесей и бетона в пространстве возможных составов на заданных материалах. В первой части статьи вводятся понятия: математического пространства составов с демонстрацией примеров его построения для бетонных смесей различного назначения, длина корреляции свойств составов и количественная мера близости составов, позволяющая постулировать непрерывность их свойств. На основе методов байесовской статистики и машинного обучения предлагаются способы эффективного использования для построения вероятностных моделей априорной информации о свойствах сырьевых материалов, накопленных статистических данных по свойствам бетонных смесей/бетонов, выраженных в виде различных эмпирических зависимостей и физико-химических моделей. Представленный в статье алгоритм позволяет создавать экономичные экспериментальные планы для построения многомерной поверхности отклика в пространстве возможных составов. Дальнейшая работа с полученной поверхностью отклика может осуществляться различными методами, например путем изучения срезов по интересующим координатным осям в произвольных плоскостях или направлениях.

Ключевые слова: бетонные смеси, математическое пространство составов, непрерывность свойств.

Для цитирования: Резаев Р.О., Дмитриев А.А., Чернявский Д.В. Применение вероятностных подходов для построения моделей «состав—свойство». Часть I (Теория) // Бетон и железобетон. 2022. № 4–5 (612–613). С. 25–37. DOI: <https://doi.org/10.31659/0005-9889-2022-612-613-4-5-25-37>

R.O. REZAEV^{1,2}, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics) (rezaev.roman@gmail.com);
A.A. DMITRIEV², Engineer; D.V. CHERNYAVSKY¹, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics)

¹ IFW Institute for Theoretical Solid State Physics (Helmholtzstraße 20, 01069 Dresden, Germany)

² Tomsk Polytechnic University (30, Lenina Avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation)

Application of Probabilistic Approaches for the Construction of "Composition–Property" Models. Part I (Theory)

In a series of two articles, the concept of constructing probabilistic models of the properties of concrete mixtures and concrete in the space of possible compositions on given materials is discussed. In the first part of the article, the following concepts are introduced: the mathematical space of compositions with demonstration of examples of its construction for concrete mixtures for various purposes, the length of the correlation of composition properties, and a quantitative measure of the proximity of compositions, which makes it possible to postulate the continuity of their properties. Based on the methods of Bayesian statistics and machine learning, methods are proposed for the effective use of a priori information on the properties of raw materials, accumulated statistical data on the properties of concrete mixes/concrete, expressed in the form of various empirical dependencies and physicochemical models, for constructing probabilistic models. The algorithm presented in the article makes it possible to create economical experimental plans for constructing a multidimensional response surface in the space of possible compositions. Further work with the obtained response surface can be carried out by various methods, for example, by studying slices along the coordinate axes of interest in arbitrary planes or directions.

Keywords: concrete mixtures, mathematical space of compositions, continuity of properties.

For citation: Rezaev R.O., Dmitriev A.A., Chernyavsky D.V. Application of probabilistic approaches for the construction of "composition–property" models. Part I (Theory). *Beton i Zhelozobeton* [Concrete and Reinforced Concrete]. 2022. No. 4–5 (612–613), pp. 25–37. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.31659/0005-9889-2022-612-613-4-5-25-37>

При фиксированных протоколах приготовления бетонной смеси, сырьевых материалов, условиях твердения бетона, методиках испытания соответствующие свойства бетона/смеси будут однозначно определяться своим *составом* – соотношениями объемных долей входящих в смесь компонентов – фракциями заполнителей, цементом, водой, микро-

наполнителями и т. д. Обусловленная практикой необходимость поиска состава, обеспечивающего заданный комплекс свойств, или его условная оптимизация по критерию себестоимости, срокам набора прочности, подвижности смеси и т. д. неизбежно актуализирует проблему прогнозирования свойств бетона/смеси для произвольного состава, выбран-

ного из множества потенциально реализуемых на *заданных* сырьевых материалах. Степень сложности этой проблемы определяется комбинаторным характером выбора конкретного состава из всех возможных вариантов и, как правило, имеет экспоненциальный рост с увеличением количества компонентов смеси. Например, если рассматривать смеси бетона товарного назначения на стандартных материалах (ГОСТ 25192–2012 «Бетоны. Классификация и общие технические требования»; ГОСТ 7473–2010 «Смеси бетонные. Технические условия»; ГОСТ 26633–2015 «Бетоны тяжелые и мелкозернистые. Технические условия») с диапазоном их расхода на 1 м³ смеси, указанным в скобках, – щебень (от 900 до 1300 кг/м³), песок (от 650 до 900 кг/м³), цемент (от 200 до 500 кг/м³) и вода (от 170 до 220 кг/м³), то с шагом варьирования количества материала в смеси 10 кг/м³ мы получим 150000 возможных вариантов составов. Добавление в смесь, например, шлака с расходом из диапазона от 0 до 150 кг/м³ с прежним шагом варьирования увеличит количество возможных составов до 2250000. Цифры ориентировочные и допускают дискуссию по поводу выбора диапазона расхода материалов или шага варьирования, однако суть проблемы данный пример иллюстрирует в полной мере.

К решению проблемы прогнозирования свойств бетона/смеси можно подойти с различных сторон. Фундаментальный аналитический подход подразумевает, во-первых, всесторонний анализ свойств исходных материалов из какого-то класса, используемого для бетонной смеси, с последующим выделением из них наиболее важных для формирования интересующего целевого свойства бетона/смеси [1–11] (например, модуль крупности песка, форма частиц крупного заполнителя, гранулометрический состав сыпучих компонентов и т. д.). Во-вторых, в отдельную задачу можно выделить поиск различных безразмерных параметров, от которых зависит целевое свойство. Примером безразмерного параметра, имеющего доминирующий вклад в формирование прочности бетона товарного назначения, является водоцементное отношение В/Ц. Практическим выходом работы в данном направлении являются различные эмпирические закономерности [6], связывающие целевые свойства бетона/смеси с совокупностью релевантных параметров и характеристик сырьевых компонентов. Для каждого коэффициента, входящего в эмпирическую зависимость, определяется область его допустимых значений с соответствующими рекомендациями их выбора в зависимости от используемых материалов, как, например, в случае уравнения Болоева – Скрамтаева, в которое в явном виде входит В/Ц и несколько коэффициентов, зависящих от качества сырьевых ком-

понентов и активности цемента. Сильной стороной аналитического подхода является получение результатов независимых от специфики конкретных материалов в рамках некоторого класса, что особенно важно при разработке различных отраслевых стандартов, технических условий и рекомендаций для обоснования технологических решений. Эмпирические закономерности хорошо подходят для определения направления или стратегии, которую нужно использовать для достижения желаемых свойств бетона/смеси, однако при решении конкретных проблем оптимизации или поиска конкретного состава, согласно его определению в начале текста – количественное соотношение заданных материалов, – такого рода подходы, используемые в качестве моделей прогнозирования свойств, могут упустить важные каналы управления свойствами бетона. В целях примера воспользуемся вышеприведенной ссылкой на линейную связь прочности бетона товарного назначения с фактором В/Ц. Если ограничиться только этой зависимостью и пренебречь всеми оставшимися вкладами в прочность, то это приведет к потере как минимум 10–20% канала оптимизации прочности за счет варьирования [2, 5, 6] соотношения между мелким (П, песок) и крупным (Щ, щебень/гравий) заполнителями $r = П / (П + Щ)$. При этом чем шире область применения какой-либо конкретной эмпирической закономерности, тем больше неопределенность в выборе численных значений коэффициентов, входящих в данную закономерность, и тем больше неопределенность в прогнозных значениях свойств. Один из надежных способов определения коэффициентов эмпирической зависимости – непосредственная минимизация среднеквадратического отклонения прогнозных значений от фактических, полученных из экспериментальных данных. Последние, однако, как это часто оказывается на практике, можно аппроксимировать более точно, если заменить выбранную эмпирическую закономерность какой-либо другой функцией [12], справедливой в частном случае и учитывающей неявно специфику используемых конкретных материалов.

Формализация подобных сугубо утилитарных ad hoc подходов к построению прогнозных моделей свойств физической/технической системы на основании только выборки экспериментальных данных привела к развитию методов суррогатного моделирования [13], математического планирования экспериментов [14], регрессионного анализа и других подобных направлений [15]. В контексте оптимизации состава бетонных смесей данные методы широко известны и активно применяются, например для выявления корреляционных зависимостей между различными факторами и целевыми

свойствами [16–18]. Главное отличие этой группы методов от аналитического построения моделей состоит в том, что искомая модель свойства может быть построена, во-первых, всегда, а во-вторых, для любого набора материалов бетонной смеси без проведения предварительного их анализа. Для этих целей составляется матрица планирования факторных экспериментов, позволяющая выявить степень влияния того или иного фактора (или материала) на заданное свойство. Бетонная смесь/бетон и используемые материалы представляются как черный ящик, их внутренним устройством при таком подходе не интересуются и для описания функции отклика между входом (факторы, расходы материалов) и выходом (свойства бетона) часто пользуются полиномиальными закономерностями первого, второго и третьего порядков, что обеспечивает достаточное количество степеней свободы для аппроксимации большинства наблюдаемых экспериментальных данных в бетонных смесях/бетонах с высокой точностью, как правило, выше, чем при использовании обобщенных эмпирических зависимостей. Однако при всех положительных сторонах данной группы методов существуют и серьезные их недостатки, сужающие область практического применения. Суррогатные модели имеют слабую обобщающую способность – построенные на каком-то одном наборе конкретных материалов зависимости нельзя применять к другим материалам, даже если они близки по своим свойствам к первоначальным. Эта проблема уходит своими корнями в исследование вопросов об устойчивости моделей по своим коэффициентам [19], и если в случае линейных откликов построенные модели устойчивы, то для квадратичных и более высокого порядка зависимостей, обладающих более высокой точностью по сравнению с линейными моделями, говорить об устойчивости в общем случае нельзя: какое-либо незначительное отклонение в значении коэффициентов, вызванное вариацией исходных экспериментальных данных или сменой материалов, может привести к изменению канонического вида поверхности отклика [20]. Потенциальное решение данной проблемы может лежать во введении дополнительного условия на устойчивость при определении коэффициентов поверхности отклика, однако это приводит к усложнению методов и повышает их трудоемкость. Последнее является в целом отличительной особенностью методов суррогатного моделирования. Для построения многофакторной модели необходимо большое количество экспериментальных данных, причем это количество, как уже указывалось ранее, имеет экспоненциальный характер сложности – добавление в модель даже одного фактора сразу на порядок уве-

личивает количество необходимых для построения модели экспериментальных точек. Таким образом, можно утверждать, что решение задачи прогнозирования свойств состава с достаточной для практических целей точностью по заданному расходу материалов без излишней трудоемкости и необходимости глубокого анализа используемых материалов на сегодняшний день по-прежнему актуально.

Общей для практики применения как эмпирических зависимостей, так и суррогатных моделей (поверхностей отклика) является проблема учета коэффициента вариации экспериментальных данных, по которым была построена модель. Накопленный научным и производственным сообществом экспериментальный опыт работы с бетонными смесями/бетоном указывает на необходимость явного учета специфики случайных процессов при построении моделей прогнозирования. Это фундаментальная проблема, поскольку бетонная смесь представляет собой открытую неравновесную систему, сопряженную с неполнотой информации о ее свойствах, свойствах составляющих ее ингредиентов, а также процессов, формирующих ее реакцию на внешние воздействия. Такие условия и факторы выводят на первый план вероятностный характер всей совокупности рабочей информации, как входной, так и прогнозной, актуализируя проблему разработки методов вероятностного моделирования [21] и количественной оценки меры неопределенности прогнозных данных о свойствах бетонных смесей/бетона. Решению этой проблемы благоприятствуют современные тенденции развития [22] методов машинного обучения, анализа данных и т. д. В частности, в настоящее время наблюдается тектонический сдвиг вычислительных возможностей, обусловленный потребностью решения широкого класса задач в области прогнозирования и оптимизации в совершенно различных областях, от прогнозирования ставок котировок на торгах на различных биржах [23] до автоматической постановки диагноза больного пациента по рентгенографическим снимкам [24]. Ряд перспективных концепций и идей в области анализа данных, ранее труднореализуемых на практике, таких как, например, байесовская статистика и оптимизация [25], стали доступными для повсеместного использования на персональном компьютере. С учетом развития новых вычислительных подходов решение задачи прогнозирования свойств составов бетона по заданному количественному соотношению входящих компонентов обретает новые перспективы. Например, для описания множества всех составов бетонной смеси, состоящей из щебня/гравия, песка, цемента, микронаполнителя и некоторого набора химических добавок без учета воз-

духововлечения потребуется четыре независимые координаты. Если попытаться построить поверхность отклика в таком координатном пространстве классическими методами математического планирования, то потребуется существенно более 50 экспериментальных точек, в то время как вовлечение априорной информации даже о качественном характере потенциальной зависимости искомого свойства от различных параметров в контексте байесовской статистики позволит получить поверхность отклика на базе экспериментального плана из 10–15 точек. Отметим при этом, что какой-либо эмпирической модели для интересующего свойства может и не быть вовсе и альтернатива байесовской статистике – это последовательный перебор экспериментальных точек, что сопряжено со значительными временными и трудовыми затратами.

Целью настоящей работы является описание общей концепции и результатов построения прогнозной модели «состав–свойство», позволяющей получать количественную оценку свойств бетонной смеси/бетона исходя из соотношения между используемыми сырьевыми материалами. Параметры прогнозной модели калибруются по информации о типовых характеристиках используемых материалов: гранулометрический состав, истинные/насыпные плотности и т. д. и по результатам специального экспериментального плана, позволяющего оценить корреляции между значениями свойств различных составов. Построенная прогнозная модель представляет интерес как с практической стороны, поскольку позволяет быстро решить задачу оптимизации состава бетона по комплексу свойств или найти состав с заданными свойствами, так и с фундаментальной, предлагая новые инструменты для тестирования на правдоподобность физико-химических гипотез о вкладе различных факторов в интересующее свойство. Предлагаемая к обсуждению концепция решает проблемы неоднозначного описания поверхности отклика различными аналитическими функциями и устойчивости модели с помощью введения вероятностного пространства допустимых значений прогнозных свойств бетонной смеси/бетона, что позволяет в некотором смысле обобщать результаты, полученные на одном классе материалов, на более широкие классы. Практическое использование представленных методов раскрыто во второй части статьи, где, в частности, продемонстрированы результаты построения прогнозной модели прочности, осадки конуса на примере бетонных смесей товарного назначения на стандартных материалах (ГОСТ 25192–2012; ГОСТ 7473–2010; ГОСТ 26633–2015), а также возможности для оптимизации содержания активной минеральной добавки на примере золы-уноса [26–28]. Заключение, пред-

ставленное во второй части статьи, завершается обсуждением перспектив развития методов построения прогнозных моделей для решений практических и фундаментальных задач.

Метод построения прогнозных моделей «состав–свойство» для бетонных смесей Формализация

Во введении было определено, что состав – это соотношение входящих в смесь компонентов П/Щ/Ц/П:Ц/В= $x:y:z$ при фиксированных свойствах материалов и, отталкиваясь от этого определения, можно описать математический формализм для множества составов относительно переменных (x, y, z) , дополнив их условием нормировки расходов материалов на единицу объема смеси. Однако это представление неудобно для включения в модель поправок на воз-духововлечение или построения моделей для бетонных смесей с низким содержанием цементного теста, когда его может быть недостаточно для заполнения межзерновых пустот заполнителей. Более наглядным и удобным в этой связи будет использование в качестве определения состава напрямую расхода материалов на единицу объема смеси. Совокупность всех возможных на заданных материалах составов $\{m\}$ образует некоторое математическое множество M , практическая польза от введения которого будет в том случае, если все его элементы спроецировать/отобразить взаимнооднозначным образом на какое-либо подмножество хорошо изученного в математическом смысле пространства. Наиболее привлекательным для построения моделей является n -мерное евклидово пространство, размерность которого будет кодировать количество независимо изменяемых компонентов. Покажем на конкретном примере четырехкомпонентной бетонной смеси – Щ (щебень/гравий), П (песок), Ц (цемент), В (вода) – как можно определить взаимнооднозначное соответствие между трехмерным евклидовым пространством и всеми составами, возможными на данных материалах. Рассмотрим сперва случай смесей тяжелого бетона без учета воздухововлечения:

$$\frac{\text{Щ}}{\rho_{\text{Щ}}^n} + \frac{\text{П}}{\rho_{\text{П}}^n} + \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{Ц}}^n} + \frac{\text{В}}{\rho_{\text{В}}^n} = 1, [\text{м}^3] \quad (1)$$

где ρ с соответствующими индексами задает истинные плотности вещества. Условие нормировки (1) на единицу объема смеси оставляет возможным независимое варьирование трех компонент и взаимнооднозначное соответствие между точками пространства (Щ, П, Ц) и каждым составом естественным образом определяется, как показано на рис. 1.

Следующий случай аналогичный первому, но с учетом воздухововлечения. Будем различать два

варианта – неконтролируемое (случайное) и контролируемое (управляемое) воздухововлечение [10, 11]. В первом варианте мы имеем дело с негативным явлением, когда технолог должен прилагать усилия для уменьшения объемной доли воздухововлечения до диапазона от 0 до 3%. Цель усилий состоит в том, чтобы достичь состояния смеси, описываемого точкой из предыдущего рассмотренного случая см. уравнение (1). Следовательно, по-прежнему имеется возможность использовать для описания составов пространство (Щ, П, Ц) (рис. 1), однако теперь с каждой его точкой будет ассоциироваться небольшая случайная компонента $\delta\epsilon$: $m \sim m_0 + \delta\epsilon$, где m_0 – это целевой состав с нулевым содержанием воздуха, т. е. состав, который технолог стремится достичь. «Шумовая» компонента $\delta\epsilon$ будет постоянно отклонять целевой состав, который подразумевается исходя из уравнения (1), в какой-то другой состав, реально неизвестный, однако, в силу малости $\delta\epsilon$, находящийся в пространстве (Щ, П, Ц) близко к целевому, и, следовательно, логично предположить, что свойства этих составов будут не сильно отличаться друг от друга. Отметим, что уже на этом этапе формализации мы можем наметить контуры для исследования таких важных с практической точки зрения вопросов, как анализ влияния на свойства бетона различных факторов неопределенности, случайных отклонений в параметрах технологического процесса и т. д. В зарубежной литературе это направление оформилось в виде так называемого *uncertainty quantification*, и достаточно широко применяется в задачах материаловедения [29], в частности, в монографии [30] дается систематическое изложение применения методов стохастического анализа, в том числе в контексте исследований прочностных свойств бетона.

Контролируемое воздухововлечение предполагает объемное содержание воздушных пор в смеси на уровне, которым уже нельзя пренебречь в уравнении абсолютных объемов, и необходимо вводить дополнительный член, связанный с объемом воздуха:

$$\frac{\text{Щ}}{\rho_{\text{Щ}}^n} + \frac{\text{П}}{\rho_{\text{П}}^n} + \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{Ц}}^n} + \frac{\text{В}}{\rho_{\text{В}}} + V_{\text{возд}} = 1, \text{ м}^3 \quad (2)$$

В соответствии с вышеприведенной логикой для описания множества составов, описываемых уравнением (2), потребуется четырехмерное пространство – (Щ, П, Ц), и (В или $V_{\text{возд}}$), четвертую координату можно выбрать в виде объемной доли либо воды, либо воздуха. Таким образом, можно построить взаимно однозначное соответствие между точками этого пространства и составами с контролируемым воздухововлечением.

Крупнопористый (тощий) бетон является примером группы составов, когда объема цементного теста

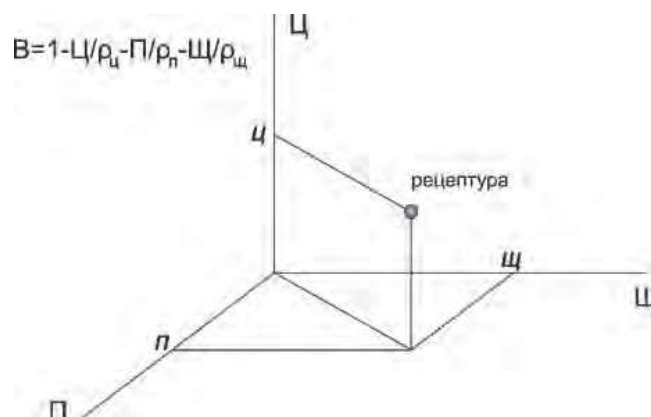


Рис. 1. Пространство для определения множества составов: ρ – истинная плотность вещества

Fig. 1. Space for determining the set of compositions, ρ is the true density of matter

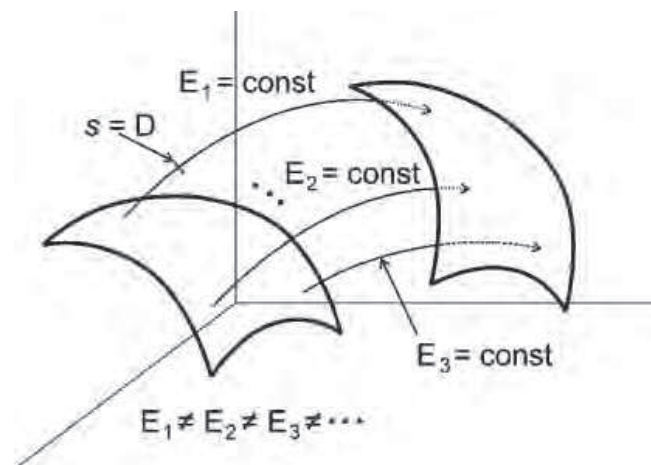


Рис. 2. Схема отображения поверхности отклика под действием фактора добавки: s – длина траектории; D – содержание добавки; E – значение свойства

Fig. 2. Scheme of displaying the response surface under the action of the additive factor: s – is the length of the trajectory; D – is the content of the additive; E – is the value of the property

может быть недостаточно для заполнения межзерновых пустот заполнителей [1]. В этом случае для определения пространства составов расходы материалов удобно нормировать на суммарный объем твердой+жидкой фазы:

$$\alpha = \frac{\text{Щ}}{\rho_{\text{Щ}}^n V_{\text{ТВ+Ж}}}; \quad \beta = \frac{\text{П}}{\rho_{\text{П}}^n V_{\text{ТВ+Ж}}}; \quad \gamma = \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{Ц}}^n V_{\text{ТВ+Ж}}}; \quad \delta = \frac{\text{В}}{\rho_{\text{В}} V_{\text{ТВ+Ж}}}; \quad (3)$$

$$V_{\text{ТВ+Ж}} = \frac{\text{Щ}}{\rho_{\text{Щ}}^n} + \frac{\text{П}}{\rho_{\text{П}}^n} + \frac{\text{Ц}}{\rho_{\text{Ц}}^n} + \frac{\text{В}}{\rho_{\text{В}}}. \quad (4)$$

Таким образом, и в этом случае имеется возможность построения математического пространства составов. Одним из наиболее важных для построения и анализа математических моделей «состав–свойство» следствий отображения множества составов на евклидово пространство является возможность определить количественную меру «близости» составов.

акой мерой можно считать в соответствии с геометрической интуицией отрезок, соединяющий любые две точки в пространстве составов. Введение такого понятия позволяет *обоснованно* использовать на абстрактном пространстве составов различные инструменты, методы и концепции, развитые в математическом анализе, математической физике, теории динамических систем и т. д. В этом случае модель какого-либо свойства формализуется как способ отображения P , в простейшем варианте понимаемый как некоторая функция $f(m)$, определенный на пространстве составов, либо на множество вещественных чисел R^1 , представляющих значения этого свойства, либо на вероятностное пространство, связанное со значениями изучаемого свойства.

Рассмотрим следующий иллюстративный пример, как можно, исходя из некоторых предположений, включить в модель «состав–свойство» пластифицирующую химическую добавку. Будем считать, что весь эффект от введения добавки сводится к аддитивному изменению свободной поверхностной энергии на некоторую величину ΔE [31]. В результате можно из каждой точки поверхности, описывающей модель поверхностной энергии $E(m)$ составов без добавки, «выпустить» некоторую траекторию, параметризуемую длиной s , тождественно равной содержанию добавки в смеси $s \equiv D$ (схематически это выглядит, как показано на рис. 2), такую, что вдоль этой траектории значение поверхностной энергии будет постоянным:

$$E(m(D)) = \text{const}, \quad (5)$$

где D – содержание добавки; $m = \{m_1, \dots, m_n\}$ – состав; m_i – составляющие ингредиенты. Если далее мы продифференцируем уравнение (5) по D , то получим:

$$\frac{\partial E}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial D} + \dots + \frac{\partial E}{\partial m_n} \frac{\partial m_n}{\partial D} = 0. \quad (6)$$

Уравнению (6) должны удовлетворять функции замены расхода материалов при использовании добавки, чтобы сохранить свойства смеси. Эти функции можно использовать для оценки, например, экономической эффективности применения добавки. Отметим интересную аналогию между внешним сходством уравнения (5) и подходом к описанию динамических систем [32]. Такая аналогия содержит потенциал применения методов, развитых в теории динамических систем для исследования свойств поверхностей отклика под действием различных факторов. В текущем варианте работы оставим развитие этой идеи для предмета дальнейших исследований и далее сформулируем необходимость явного рассмотрения вероятностной компоненты при построении моделей «состав–свойство».

Вероятностная модель

Математический аппарат теории вероятности был разработан для исследования систем, в которых невозможно выписать все причинно-следственные соотношения с необходимой точностью. Типичным примером является выбрасывание игральной кости в форме кубика на стол и фиксирование количества очков, которые выпадают на верхней грани; при каждом броске будет выпадать один из шести вариантов. Теоретически можно было бы выписать уравнения, определяющие силу трения кубика о поверхность стола; силу, с которой кубик бросается экспериментатором на стол и т. д. Эти уравнения известны – второй закон Ньютона, уравнение динамики вращательного движения и др. Однако любое незначительное отклонение в начальных и граничных условиях к уравнениям приведет к тому, что реальный результат будет отличаться от предсказанного. В таких случаях при составлении прогнозов результата эксперимента необходимо ставить цель не предсказать, какое конкретно количество очков будет выпадать, а *определить, с какой вероятностью* будет получаться то или иное количество очков. Если предполагать, что кубик симметричный, то вероятности выпадения каждой из граней равны друг другу. Однако при работе с реальными объектами и системами часто наблюдается неодинаковая вероятность получения различных результатов. Например, если кубик будет утяжелен на какую-то одну грань, то при большом количестве испытаний будет наблюдаться смещение в пользу одного и того же количества очков. Методы оценки вероятности получения различных результатов в подобных случаях представляют практический интерес. Большую роль при этом играет априорная информация. На примере асимметричного кубика это выглядит следующим образом. Предположим, что стоит задача определения, какая из граней кубика будет иметь наибольшую вероятность выпадения. Если ничего не известно о кубике, то фактически нужно понять, во-первых, асимметричный он или нет, и только потом выяснять, какая из его граней имеет наибольшую вероятность выпадения. В совокупности для этого необходимо выполнить не менее какого-то количества N_1 бросков кубика (реализаций эксперимента). Однако, *если известно заранее*, что кубик асимметричен, например, по измерениям компонентов его момента инерции, то для того, чтобы выяснить на какую именно грань он асимметричен, потребуется $N_2 \ll N_1$ экспериментов, гораздо меньше, чем в предыдущем случае. Любая априорная информация об изучаемой системе может представлять ценность для определения вероятности отклика этой системы на внешнее воздействие.

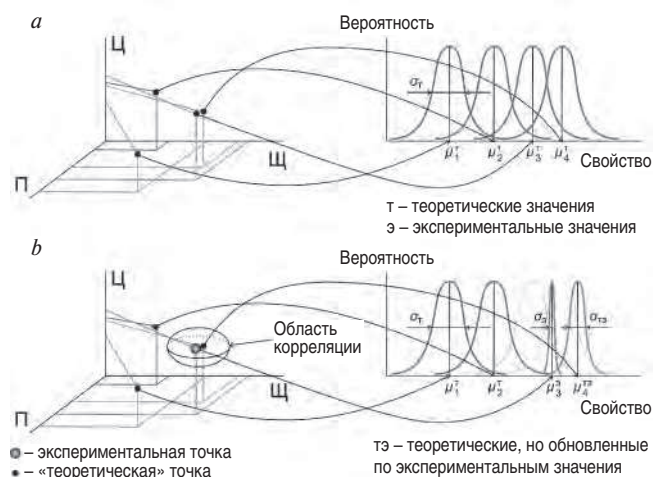


Рис. 3. Схематическое построение, демонстрирующее идею использования корреляции свойств составов в различных точках: а – до эксперимента; б – после эксперимента

Fig. 3. Schematic construction demonstrating the idea of using the correlation of composition properties at different points: а – before the experiment; б – after experiment

Бетонная смесь по природе своей имеет случайную компоненту. Сыпучие материалы, например, являются объектом изучения статистической физики [33], неравновесность процессов в смеси определяется направлением химических реакций, условия окружающей среды формируют случайные граничные условия, и, наконец, существуют различные методические и инструментальные ошибки, связанные с процессом измерения интересующего свойства. Как результат, к любой количественной оценке какого-либо свойства всегда необходимо относиться как к случайной величине, распределенной по некоторому закону вероятности. В практике работы с бетонными смесями этот момент часто учитывается с помощью такой величины, как коэффициент вариации. В этом смысле и результат прогноза значения свойства того или иного состава должен выполняться в вероятностном контексте. Для наглядности можно образно представить, что с каждой точкой пространства составов связана функция распределения вероятности принятия значений того или иного свойства. Существуют различные классы функций распределения, каждый из которых характеризуется своим набором параметров. Если для описания свойств бетонной смеси использовать нормальное распределение, то достаточно будет знать в каждой точке пространства составов два параметра – математическое ожидание μ и среднеквадратичное отклонение σ . Отметим важный постулат: даже не выполнив ни одного эксперимента, всегда можно определить для каждого состава функцию распределения вероятности значений свойств. Однако в этом случае параметр σ будет большим, предсказывая большой диапазон размаха возможных значений. Экспери-

ментальные данные для любого состава автоматически сужают в этой точке среднеквадратичное отклонение σ и смещают математическое ожидание μ до экспериментальных значений (рис. 3). С учетом непрерывности свойств по точкам пространства составов при проведении измерений в какой-то одной точке автоматически генерируется информация о свойствах «соседних» составов, находящихся на некоторой «дистанции» от точки, в которой было проведено измерение. Размер этой дистанции зависит от соответствующей длины корреляции, которая, в свою очередь, зависит от свойств материалов и от самого изучаемого свойства. Каждая новая измеренная точка несет с собой пласт априорной информации для окружающих ее точек, которая позволяет по аналогии с асимметричным кубиком уменьшить количество экспериментов для оценки вероятности в других точках. В результате экспериментатор (или технолог на производстве) получает возможность, используя небольшое число экспериментальных данных, приближенно восстановить функцию плотности распределения вероятности значений свойств для всех точек пространства составов. Без учета длины корреляции классические методы математического планирования экспериментов для решения подобной задачи потребовали бы несравнимо большее количество экспериментов. Таким образом, априорная информация позволяет эффективно ориентироваться в многомерном пространстве всех возможных составов.

Следующий аспект, который необходимо рассмотреть в данном подразделе, – решение проблемы неоднозначности выбора регрессионной модели [34]. Предположим, что мы имеем две модели, одинаково хорошо аппроксимирующие (например, методом наименьших квадратов) некоторые экспериментальные данные по прочности зависимостью от В/Ц, однако при этом дающие различные прогнозные значения в интересующих точках. Какую из моделей выбрать в качестве «правильной»? Рассмотрим, как можно получить взвешенную оценку прочности, используя обе модели с помощью теоремы Байеса. Для конкретики будем предполагать, что первая модель имеет вид $R_1 = 50 - 35 \cdot (В/Ц)$ линейной зависимости для среднего значения прочности как функции В/Ц, а вторая модель имеет вид степенной функции $R_2 = 22 \cdot (Ц/В)^{0.5}$ (рис. 4). Пусть обе модели дают прогнозные значения в каждой точке, распределенные по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0,5$ МПа. До проведения нового измерения не имеется никаких предпосылок для выбора конкретной модели – обе модели R_1 и R_2 имеют одинаковое право на существование, поэтому априорная вероятность быть «правильной» для каждой

из них равна 0,5. Т. е. каждый прогноз необходимо составлять путем сложения прогнозов от каждой из моделей с весом 0,5. Далее, предположим, что было проведено новое измерение прочности для точки $B/C=0,4$ и получено экспериментальное значение $R_{\text{exp}}=(35,3\pm 0,1)$ МПа. Модели R_1 и R_2 в точке $B/C=0,4$ предсказывают, что прочность должна лежать в диапазонах $(36\pm 0,5)$ и $(34,8\pm 0,5)$ МПа соответственно. Реальные данные $(35,3\pm 0,1)$ МПа указывают на предпосылки выбора второй модели (R_2), поскольку между двумя значениями 36 и 34,8 она дает более близкую к новым экспериментальным данным величину. Следовательно, начальные веса, равные 0,5, необходимо переопределить в пользу второй модели. Новые переопределенные значения вероятности выбора модели называются постериорными вероятностями. Чтобы их получить, необходимо найти вероятности наблюдаемых в эксперименте значения по каждой из моделей, что выполняется с помощью формулы:

$$P = 2\Delta h \cdot \exp(-0,5 \cdot [(R - \langle R \rangle) / \sigma]^2) / \sqrt{2\pi\sigma^2}, \quad (7)$$

где $\sigma=0,5$ МПа; $\Delta h=0,1$ МПа – погрешности экспериментальных измерений, $\langle R \rangle$ – прогнозное значение для среднего значения; R – среднее экспериментальное значение. По первой модели (R_1) вероятность получения значения из диапазона $(35,3\pm 0,1)$ МПа равна 0,06, а по второй модели (R_2) – 0,1. Для нахождения постериорных значений вероятности используется формула Байеса $P(A|B)=P(B|A) \cdot P(A)/P(B)$, где $P(A)$ – постериорная вероятность реализации события A ; $P(B)$ – полная вероятность реализации события B и $P(B|A)$ – вероятность возникновения события B при условии появления события A . В нашем примере постериор-

ная вероятность с помощью модели R_1 позволяет получить корректные данные $P(\text{Model}=1 \text{ при условии } R_{\text{exp}}=(35,3\pm 0,1) \text{ МПа})=0,06 \cdot 0,5 / (0,06 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5)=0,375$. Соответственно вероятность для второй модели R_2 быть «правильной» имеет значение $1-0,375=0,625$.

Полученные значения постериорных вероятностей могут быть использованы для построения новой взвешенной вероятностной модели, которая будет учитывать вклад от каждой из имеющихся, с учетом того, что в реальности мы никогда не можем быть уверены в том, что знаем «истинную» модель. Результирующая модель прочности $R=0,375 \cdot R_1 + 0,625 \cdot R_2$. Обратим внимание, что всего лишь один эксперимент смог существенным образом «сдвинуть» коэффициенты при моделях в нужную сторону, т. е. поступающие экспериментальные данные эффективным образом вовлекаются в рабочий процесс без необходимости накапливать большую статистику. Теория принятия статистических решений – раздел математической статистики – предлагает несколько практических рецептов для оптимизации параметров статистических моделей, например применение минимаксной модели управления, методы взвешенного рандомизированного моделирования [34] и т. д. Существуют теоремы, доказывающие, что точность прогнозов при использовании ансамблированных (подобно тому, что было продемонстрировано выше) подходов существенно может превышать точность получаемой при использовании какой-то одной регрессионной модели. При этом методы байесовской статистики являются наиболее общим подходом [25].

Представленная концепция не допускает возможности аналитического способа получения результатов. Для практической работы необходима ее реализация в программных кодах, поэтому следующий подраздел описывает схематически алгоритм применения представленной схемы на практике.

Алгоритмическая схема построения прогнозных моделей

Построение прогнозных моделей в общем случае состоит из нескольких этапов – сбор информации о свойствах исходных материалов, составление и реализация экспериментального плана, обработка данных, верификация модели, составление базы данных, графический или иной интерфейс для дальнейшей работы с моделью. Общая схема представлена на рис. 5: блок 1 описывает структуру байесовской статистики; блок 2 – применение этой статистики для бетонных смесей; блок 3 – конкретный алгоритм. Свойства исходных материалов используются как для составления экспериментального плана, для которого в том числе могут использо-

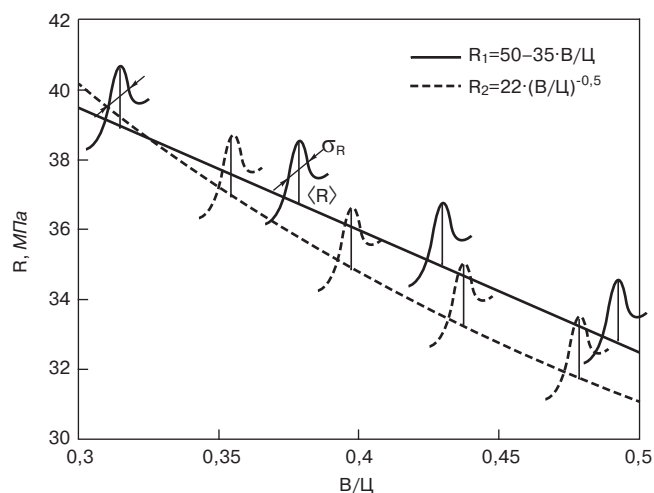


Рис. 4. Иллюстрация моделей, одинаково хорошо описывающих некоторые экспериментальные данные

Fig. 4. Illustration of models that equally well describe some experimental data



③ Реализация алгоритма для смесей



Рис. 5. Схема построения вероятностной модели и алгоритм ее реализации

Fig. 5. Scheme for constructing a probabilistic model and an algorithm for its implementation

ваться и накопленные статистические данные, так и для создания векторов признаков, поступающих в алгоритмы машинного обучения. В зависимости от свойства, для которого строится модель, может потребоваться различное количество точек экспериментального плана. Например, минимальное количество экспериментальных точек для построения модели осадки конуса четырехкомпонентной бетонной смеси составляет семь замесов. Этого достаточно, чтобы приближенно оценить осадку конуса для всех остальных возможных составов при условии, что известна с хорошей точностью нормальная густота цементного теста НГТЦ, гранулометрический состав песка и щебня, содержание в последнем лещадных зерен и водопотребность песка. Однако если эти параметры неизвестны или нет возможности их измерить, можно учесть соответствующий вклад, с ними связанный, с помощью дополнительного количества экспериментальных точек. Таким образом, отклик от любого типа неопределенности оценивается через экспериментальные данные. В пространстве составов (Щ, П, Ц) легко можно выделить направление, вдоль которого нужно собрать информацию о факторах, связанных, например, с песком. Как правило, по трем экспериментальным точкам вдоль этого направления легко устанавливается характер факторной зависимости – возрастающая/убывающая, линейная/нелинейная, если нелинейная, то достаточно ли второго порядка полинома для описания этого вклада и т. д. Реализация экспериментального плана – ответственный этап и наиболее трудоемкий, требующий наличия опыта работы в строительной лаборатории. Замесы необходимо выполнять на сухих материалах в лабораторных условиях и следить за соблюдением протокола приготовления бетонной смеси. Задача экспериментального плана – охватить крайние и средние точки рабочей области составов, как правило, в крайних точках бетонные смеси либо склонны к расслоению, либо имеют жесткий класс подвижности.

Большую роль при обработке экспериментальных данных играет функция правдоподобия для этих данных. Эта функция возникает в том случае, когда нужно оценить количественное значение параметров, определяющих функцию распределения вероятности измеряемой величины [21]. В соответствии с методом максимального правдоподобия значения параметров, при которых эта функция принимает максимальное значение при фиксированной выборке, принимаются за «истинные». Функция правдоподобия строится исходя из выбора класса функций плотности распределения вероятности. Для нормального закона распределения эта функция имеет вид:

$$\mathcal{L}(\theta|y) = \prod p(y = Y_i | \theta = \{\mu, \sigma\}), \quad (8)$$

где Y_i – экспериментальные значения; i – нумерация этих значений; μ, σ – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение (в общем случае являются функциями от состава m).

Выполнив процедуру максимизации функции правдоподобия, параметры эмпирических зависимостей, связанные с величинами μ, σ , используются далее для построения новой плотности распределения вероятности в соответствии с формулой Байеса (рис. 5). Для процедуры ансамблирования модели по взвешенным составляющим необходимо создать базовый стек ансамбля (набор), элементами которого могут быть либо эмпирические зависимости, либо алгоритмы машинного обучения. Последние в качестве вектора признаков могут использовать расчетные значения, полученные исходя из анализа свойств материалов: плотность упаковки, удельная поверхность, толщина обмазки зерен заполнителей и т. д. Кроме того, количественные характеристики свойств материалов также могут быть вовлечены в вектор признаков для машинного обучения (рис. 5, блок 3).

Существует большое количество эмпирических зависимостей для прочности R [35], часть из которых, представленная в таблице, может быть использована в качестве элементов ансамбля. Некоторые зависимости из этой таблицы используют максимальное значение эффективной толщины обмазки (MPT – *maximum paste thickness*), рассчитываемой по формуле:

$$\text{MPT} = D_{\max} \left(\sqrt[3]{\frac{\phi^*}{\phi} - 1} \right), \quad (9)$$

где $D_{\max}$ – максимальный диаметр заполнителей; ϕ^*, ϕ – максимальная и реальная плотность упаковки; другие величины из таблицы имеют следующий смысл: V_c, V_w, V_a – объемные доли цемента, воды и воздуха; w, c – массовый расход воды и цемента на единицу объема смеси; α, C_3S – степень гидратации цемента и процентное содержание в его составе алита; S_s – удельная поверхность цемента; A, B, S_0, m, m_1, m_2 – калибровочные постоянные; t – срок набора прочности, выражаемый количеством суток с момента начала добавления воды в смесь.

Обсудим некоторые расчетные свойства, используемые в качестве вектора признаков для машинного обучения. Для расчета плотности упаковки нами была использована линейная модель плотности упаковки с возможностью учета процесса упаковки с помощью *индекса компактности* [3]:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{y_i / \beta_i}{1 / \Phi - 1 / \gamma_i}, \quad (10)$$

Эмпирические зависимости для ансамбля модели прочности
Empirical dependencies for the strength model ensemble

$R = A \left(\frac{V_c}{V_c + V_w + V_a} \right)^B$	$R = \frac{A}{B^{w/c}}$
$R = A \left[\frac{100\alpha}{1,53 \frac{w}{c} + \frac{V_a}{c} + \frac{\alpha}{2,06}} - B \right]$	$R = A \frac{c}{w} + B \times 10^{-0,038V_a}$
$R = \frac{A}{B^{[mc+w/c]}} \times 10^{-0,038V_a}$	$R = KR_{28} \left[A \log(t/28) + \left(\frac{V_c}{V_c + V_w + V_a} \right)^B \right] \text{MPT}^m$
$R = A \left(\frac{0,66\alpha}{\frac{w}{c} + \frac{V_a}{c} + 0,32\alpha} \right)^B$	$R = \frac{A}{B^{w/c}} \sqrt{\frac{S_s}{S_0} \frac{100 - C_3 S e^{-m_1 t} - (100 - C_3 S) e^{-m_1 t}}{100 - C_3 S e^{-90m_1} - (100 - C_3 S) e^{-90m_1}}} \times 10^{-0,038V_a}$

где n – количество фракций в смеси; i – номер конкретной частной фракции; β_i – виртуальная (максимально достижимая теоретически) плотность упаковки монодисперсной смеси (i -й фракции); y_i – объемная доля i -й фракции; γ_i – виртуальная плотность упаковки смеси при доминировании i -й фракции; Φ – фактическая (реальная) плотность упаковки; K – индекс компактности, эмпирический параметр, зависящий от способа приготовления смеси (уплотнения). Формула для расчета виртуальной плотности упаковки γ_i имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\gamma_i} = \sum_{j=1}^{i-1} \left[1 - b_{ij} \left(1 - \frac{1}{\beta_j} \right) \right] y_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{\beta_j} y_j + \frac{y_i}{\beta_i}, \quad (11)$$

где b_{ij} , a_{ij} – эмпирические коэффициенты, определяющие эффекты «разрыхления» и «упорядочения» [3, 36].

Удельная поверхность оценивается исходя из данных гранулометрического состава заполнителей по формуле А.С. Ладинского [6]. Вычислив плотность упаковки и удельную поверхность, можно рассчитать эффективную толщину обмазки [37] h :

$$h = \frac{V_{\text{цт}} - V_0}{S_{\text{п+щ}}}, \quad (12)$$

которая является релевантным признаком для осадки конуса [28]; $V_{\text{цт}}$, V_0 , $S_{\text{п+щ}}$ – объем цементного теста, объем межзерновых пустот заполнителей (П+Щ), рассчитанный исходя из значения плотности упаковки, и площадь поверхности заполнителей.

Для эмпирической зависимости осадки конуса от толщины обмазки (12) была разработана модель на основе аппроксимации экспериментальных данных расплыва мини-конуса цементно-песчаного раствора на встряхивающем лабораторном столике с использованием гиперболического тангенса:

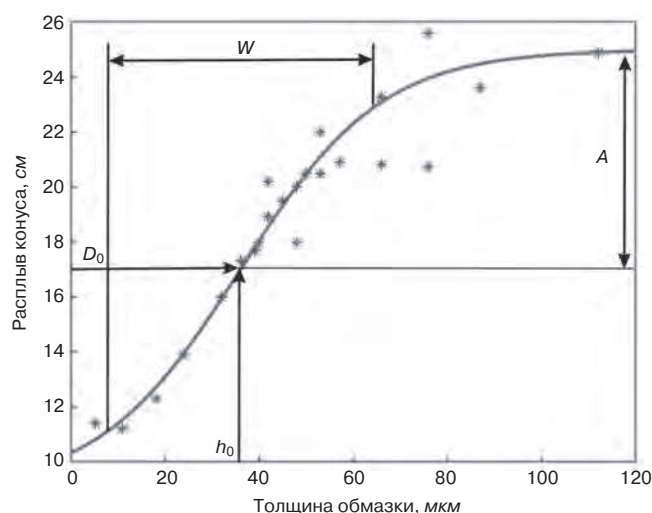


Рис. 6. Зависимость среднего диаметра расплыва конуса от толщины обмазки зерен заполнителей; на рисунке значения параметров функциональной зависимости (13) следующие: $h_0=36$ мкм; $D_0=17$ см; $A=8$ см; $W=30$ мкм

Fig. 6. The dependence of the average diameter of the cone flow on the thickness of the coating of the aggregate grains, in the figure the values of the parameters of the functional dependence (13) are as follows: $h_0=36$ μm; $D_0=17$ cm; $A=8$ cm; $W=30$ μm

$$D(h) = D_0 + A \tanh \frac{h - h_0}{W}, \quad (13)$$

где D – диаметр расплыва конуса в см (если используется осадка конуса, как в бетонной смеси с щебнем/гравием, то вместо D нужно понимать осадку конуса – ОК в см); физический смысл других коэффициентов продемонстрирован на рис. 6, из которого также следует и возможный диапазон изменения значений этих коэффициентов. Полученная эмпирическая зависимость достаточно хорошо описывает практически все наблюдаемые авторами зависимости осадки конуса от расчетной толщины обмазки.

В заключение раздела на основе вышеприведенных понятий и величин сформулирована общая схема алгоритма построения моделей, представленная на рис. 5, блок 3. Эта схема реализована в программных кодах для вычислительных машин; для плотности упаковки с целью ускорения численных расчетов был использован язык C++, для моделей машинного обучения используются библиотеки языка Python, для составления экспериментального плана – Matlab, для работы с результатами данных – веб-интерфейс с возможностью интерактивной работы как с базой данных, так и с графическими данными.

Представленная схема апробирована на материалах как минимум пяти производственных площадок от Новосибирска до Москвы. Были построены модели для прочности на 1-е сут после фиксированного режима тепловлажностной обработки, 7-е и 28-е сут нормального твердения и соответствующих плотностей, а также осадки конуса бетонных смесей на базе четырех материалов без пластифицирующих добавок и с пластифицирующими на основе лигносульфоната и поликарбоксилата. Также разработаны и реализованы экспериментальные планы для определения оптимального содержания минерального наполнителя и построены соответствующие модели для мелкозернистых бетонных смесей. Частично данные результаты приведены во второй части статьи.

Список литературы / References

1. Невилль А.М. Свойства бетона. М.: Стройиздат, 1972. 344 с.
1. Nevill' A.M. Svoistva betona [Concrete properties]. Moscow: Stroyizdat. 1972. 344 p.
2. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона. М.: Стройиздат, 1981. 464 с.
2. Akhverdov I.N. Osnovy fiziki betona [Fundamentals of concrete physics]. Moscow: Stroyizdat. 1981. 464 p.
3. De Larrard F. Concrete mixture proportioning. A scientific approach. London and New York, 1998. 448 p.
4. Шейкин А.Е., Чеховский Ю.В., Бруссер М.И. Структура и свойства цементных бетонов. М.: Стройиздат, 1979. 344 с.
4. Sheikin A.E., Chekhovskiy Yu.V., Brusser M.I. Struktura i svoistva tsementnykh betonov [Structure and properties of cement concretes]. Moscow: Stroyizdat. 1979. 344 p.
5. Zongjin L. Advanced concrete technology. Wiley. 2011. 528 p.
6. Баженов Ю.М. Технология бетона. М.: ABC, 2003. 499 с.
6. Bazhenov Yu.M. Tekhnologiya betona [Concrete technology]. Moscow: AVS. 2003. 499 p.
7. Белов В.В., Курятников Ю.Ю., Новиченкова Т.Б. Технология и свойства современных цемента и бетонов. М.: ACB, 2014. 280 p.
7. Belov V.V., Kuriatnikov Iu.Iu., Novichenkova T.B. Tehnologiya i svoistva sovremennykh cementov i betonov [Technology and properties of modern cements and concretes]. Moscow: ASV. 2014. 280 p.
8. Добшиц Л.М., Физико-математическая модель разрушения бетонов при попеременном замораживании и оттаивании // *Жилищное строительство*. 2017. № 12. С. 30–36.
8. Dobshits L.M. Physical and mathematical model of destruction of concrete under alternate freezing and thawing. *Zhilishchnoe Stroitel'stvo* [Housing Construction]. 2017. No. 12, pp. 30–36. (In Russian).
9. Шейкин А.Е. Строительные материалы. М.: Стройиздат, 1989. 432 с.
9. Sheikin A.E. Stroitel'nye materialy [Construction materials]. Moscow: Stroyizdat. 1989. 432 p.
10. Добшиц Л.М., Пути повышения долговечности бетона // *Строительные материалы*. 2017. № 10. С. 4–9 с.
10. Dobshits L.M. Ways to improve the durability of concrete. *Stroitel'nye Materialy* [Construction materials]. 2017. No. 10, pp. 4–9. (In Russian).
11. Добшиц Л.М. Морозостойкость бетонов транспортных сооружений и пути ее повышения: Дис. ... д-ра техн. наук. М., 2000. 385 с.
11. Dobshits L.M. Frost resistance of concrete transport structures and ways to improve it. Doctor Diss. (Engineering). Moscow. 2000. 385 p. (In Russian).
12. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика для инженерных и научных работников. М.: Физматлит, 2012. 816 с.
12. Kobzar' A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika dlya inzhenernykh i nauchnykh rabotnikov [Applied mathematical statistics for engineers and scientists]. Fizmatlit. 2012. 816 p.
13. Queipo N.V., Haftka R.T., Shyy W, Goel T., Vaidyanathan R., Tucker P.K., Surrogate-based analysis and optimization. *Progress in Aerospace Sciences*. 2005. Vol. 41, pp. 1–28.
14. Винарский М.С., Лурье М.В., Планирование эксперимента в технологических исследованиях. Киев: Техника, 1975. 168 с.
14. Vinarskiy M.S., Lur'e M.V., Planirovanie eksperimenta v tekhnologicheskikh issledovaniyakh [Planning an experiment in technology research]. Kiev: Tekhnika. 1975. 168 p.
15. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. М.: Диалектика, 2017. 912 с.

15. Dreiper N., Smit G., Prikladnoi regressionnyi analiz. Mnozhestvennaya regressiya [Applied regression analysis. Multiple regression]. Moscow: Dialektika. 2017. 912 p.
16. Zain M.F.M., Abd S.M. Multiple regression model for compressive strength prediction of high performance concrete. *Journal of Applied Sciences*. 2009. No. 9, pp.155–160.
17. Tao C., Kutchko B.G., Rosenbaum E., Massoudi M., A review of rheological modeling of cement slurry in oil well applications. *Energies*. 2020. Vol. 13. 570 p.
18. Дворкин Л.И., Дворкин О.Л., Расчетное прогнозирование свойств и проектирование составов бетона. М.: Инфра-Инженерия, 2019. 385 с.
18. Dvorkin L.I., Dvorkin O.L. Raschetnoe prognozirovaniye svoystv i proektirovaniye sostavov betona [Computational prediction of properties and design of concrete compositions]. Moscow: Infra-Inzheneriya, 2019. 385 p.
19. Seruet A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*. 2012. Vol. 48, pp. 177–182.
20. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. I. СПб.: Лань, 2008. 448 с.
20. Fikhtengol'ts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' I [Fundamentals of mathematical analysis. Part I]. Saint Petersburg: Lan'. 2008. 448 p.
21. Olkin I., Gleser L.J., Derman C. Probability models and applications. MacMillan Publishing Company. 1999. 575 p.
22. Jordan M.I., Mitchell T.M., Machine learning: trends, perspectives, and prospects. *Science*. 2015. Vol. 349, pp. 255–260 p.
23. Weiwei J. Applications of deep learning in stock market prediction: recent progress. *Expert Systems with Applications*. 2021. Vol. 184. 115537.
24. Ausawalaithong W., Thirach A., Marukatat S., and Wilaiprasitporn T. Automatic lung cancer prediction from chest X-ray images using the deep learning approach. *11th Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON)*. 2018, pp. 1–5.
25. Green P.J., Latuszynski K., Pereyra M., Robert C.P. Bayesian computation: a summary of the current state, and samples backwards and forwards. *Statistics and Computing*. 2015. Vol. 25, pp. 835–862.
26. Kanamarlapudi, L., Jonalagadda K.B., Jagarapu D.C.K. et al. Different mineral admixtures in concrete: a review. *SN Applied Sciences*. 2020. No. 2. 760.
27. Глекель Ф.Л. Физико-химические основы применения минеральных добавок. Ташкент: Изд-во «ФАН», 1975. 198 с.
27. Glekel' F.L. Fiziko-khimicheskie osnovy primeneniya mineral'nykh dobavok [Physical and chemical bases of application of mineral additives]. Tashkent: FAN. 1975. 198 p.
28. Mehta P.K. High performance, high-volume fly ash concrete for sustainable development. University of California, Berkeley, 2004.
29. Wang Y. and McDowell D.L. (ed.) Uncertainty quantification in multiscale materials modeling. Woodhead Publishing, 2020. 586 p.
30. Eggwertz S., Lind N.C. (ed), Probabilistic methods in the mechanics of solids and structures. Berlin: Springer-Verlag. 1985. 610 p.
31. Изотов В.С., Соколова Ю.А. Химические добавки для модификации бетона. М.: Палеолит, 2006. 244 с.
31. Izotov V.S., Sokolova Yu.A. Khimicheskie dobavki dlya modifikatsii betona [Chemical additives for concrete modification]. Moscow: Paleolit. 2006. 244 p.
32. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.: ОГИЗ, 1999. 480 с.
32. Birkhof Dzh. Dinamicheskie sistemy [Dynamic systems]. Moscow: OGIz. 1999. 480 p.
33. Baule A., Morone F., Hermann H.J., Makse H.A. Edwards statistical mechanics for jammed granular matter. *Reviews of modern physics*. 2018. Vol. 90. 015006.
34. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977. 432 с.
34. Repin V.G., Tartakovskii G.P. Statisticheskii sintez pri apriornoi neopredelennosti i adaptatsiya informatsionnykh system [Statistical synthesis under a priori uncertainty and adaptation of information systems]. Moscow: Sovetskoe radio. 1977. 432 p.
35. Chidiac S.E., Moutassem F., Mahmoodzadeh F., Compressive strength model for concrete. *Magazine of Concrete Research*. 2013. Vol. 65, pp. 557–572.
36. Белов В.В. Теоретическое обоснование оптимальных зерновых составов композиционных материалов с минеральными наполнителями // *Строительство и реконструкция*. 2017. № 5. С. 94–101.
36. Belov V.V. Teoreticheskoe obosnovanie optimal'nykh zernovykh sostavov kompozitsionnykh materialov s mineral'nymi napolnitelyami. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2017. No. 5, pp. 94–101. (In Russian).
37. Kwan A.K.H. Combined effect of water film thickness and paste film thickness on rheology of mortar. *Materials and Structures*. 2012. Vol. 45, pp. 1359–1374.