

УДК 624.012.45:539.376

[https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2\(633\)-37-50](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2(633)-37-50)**П.В. ЕРЕМЕЕВ^{1,2}, Д.В. ЕРЕМЕЕВ^{1,2}, Г.Н. ШМЕЛЕВ¹**¹ФГБОУ ВО Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия²АО «СПЕЦРЕМПРОЕКТ», ул. Заслонова, д. 5, г. Казань, 420097, Россия

УЧЕТ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ РАСЧЕТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СП 63.13330

Аннотация

Введение. Ползучесть бетона является определяющим фактором при анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных конструкций, обуславливающим рост прогибов и интенсивное перераспределение усилий между бетоном и арматурой. Традиционные подходы при расчетах по нелинейной деформационной модели (НДМ), основанные на упрощенной корректировке диаграмм состояния бетона, обладают ограниченной применимостью при расчете систем со сложной историей нагружения, в задачах релаксации напряжений и при моделировании усиления под нагрузкой.

Цель. Разработка и верификация численных алгоритмов учета ползучести в структуре НДМ на основе меры ползучести, обеспечивающих отдельное выделение мгновенных и длительных составляющих деформаций.

Материалы и методы. Предложен подход, реализуемый на уровне элементарных площадок сечения путем введения ползучести в виде начальных деформаций. Разработаны три алгоритма, различающиеся схемой аппроксимации реологического процесса: прямой итерационный учет, интегральный учет по методу трапеций и пошаговое временное интегрирование с последовательным обновлением опорных напряжений. Численная реализация выполнена в программном комплексе «НДМ+». Верификация проведена по результатам испытаний 16 центрально-сжатых железобетонных призм (Гентский университет), проводившихся в течение 12 лет, с варьированием процента армирования (0–6 %) и уровней средних напряжений в бетоне (0–15 МПа). **Результаты.** Сопоставление с экспериментальными

данными показало, что алгоритмы на основе метода трапеций обеспечивают высокую точность (погрешность 1–7 %) на всем интервале наблюдений (4000 суток). Установлено, что упрощенный итерационный учет приводит к занижению деформаций на поздних сроках до 12% вследствие накопления методической ошибки при аппроксимации релаксации напряжений. Численно подтвержден характер перераспределения усилий: для образцов с умеренным армированием ($\mu = 1,5 \%$) зафиксирован рост напряжений в арматуре до 2,36 раза при одновременном снижении напряжений в бетоне до 1,2 раза.

Выводы. Разработанные алгоритмы представляют собой развитие положений нелинейной деформационной модели, предлагая инструмент для более детального анализа НДС конструкций, возводимых по стадиям или усиливаемых под нагрузкой. Предложенный подход дополняет существующие инженерные методики, обеспечивая более строгий физический учет разделения компонентов деформаций и предоставляя инженерам гибкость в использовании различных реологических моделей.

Ключевые слова: ползучесть бетона, мера ползучести, железобетон, нелинейная деформационная модель, СП 63.13330, длительные деформации, релаксация напряжений, перераспределение усилий, численные алгоритмы, верификация

Для цитирования: Еремеев П.В., Еремеев Д.В., Шмелев Г.Н. Учет ползучести бетона при расчете железобетонных конструкций с использованием нелинейной деформационной модели СП 63.13330 // *Бетон и железобетон*. 2026. № 2 (633). С. 37–50. [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2\(633\)-37-50](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2(633)-37-50).

Вклад авторов

Еремеев П.В., Шмелев Г.Н., Еремеев Д.В. – концепция исследования, постановка задачи, разработка методологии и расчетных алгоритмов.

Шмелев Г.Н. – научное руководство.

Еремеев П.В., Еремеев Д.В. – программная реализация алгоритмов в ПК «НДМ+».

Еремеев Д.В. – литературный обзор, подготовка и обработка экспериментальных данных, выполнение численных расчетов, сопоставление с экспери-

ментом, анализ погрешностей, подготовка текста рукописи.

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 11.01.2026

Поступила после рецензирования 17.02.2026

Принята к публикации 05.03.2026

P.V. EREMEEV^{1,2}, D.V. EREMEEV^{1,2}, G.N. SHMELEV¹

¹Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelyonaya St., Kazan 420043, Russia

²JSC "SPETSREMPROEKT", 5 Zaslonskaya St., Kazan 420097, Russia

ACCOUNTING FOR CONCRETE CREEP IN THE ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES USING THE NONLINEAR DEFORMATION MODEL OF SP 63.13330

Abstract

Introduction. Concrete creep is a defining factor in the analysis of the stress-strain state (SSS) of reinforced concrete structures, causing increased deflections and intense stress redistribution between concrete and reinforcement. Traditional calculation approaches using the Non-linear Deformation Model (NDM), based on simplified adjustments to concrete stress-strain curves, have limited applicability when calculating systems with complex loading histories, in stress relaxation problems, and when modeling strengthening under load.

Aim. To develop and verify numerical algorithms for accounting for creep within the NDM structure based on a creep measure, ensuring the separate isolation of instantaneous and long-term strain components.

Materials and Methods. An approach is proposed that is implemented at the level of elementary section areas by introducing creep in the form of initial strains. Three algorithms were developed, differing in the scheme of rheological process approximation: direct iterative accounting, integral accounting using the trapezoidal method, and step-by-step time integration with sequential updating of reference stresses. Numerical implementation was carried out in the "NDM+" software complex. Verification was conducted based on test results of 16 axially compressed reinforced concrete prisms (Ghent University) conducted over 12 years, with varying reinforcement percentages (0–6 %) and average concrete stress levels (0–15 MPa).

Results. Comparison with experimental data showed that algorithms based on the trapezoidal method ensure high

accuracy (error 1–7 %) throughout the entire observation interval (4000 days). It was established that simplified iterative accounting leads to an underestimation of strains at late stages by up to 12 % due to the accumulation of methodological error during stress relaxation approximation. The nature of force redistribution was numerically confirmed: for specimens with moderate reinforcement, an increase in reinforcement stresses of up to 2.36 times was recorded, with a simultaneous decrease in concrete stresses by a factor of 1.2.

Conclusions. The developed algorithms represent an advancement of the provisions of the non-linear deformation model, offering a tool for a more detailed SSS analysis of structures constructed in stages or strengthened under load. The proposed approach complements existing engineering methodologies, ensuring a more rigorous physical accounting for the separation of strain components and providing engineers with flexibility in using various rheological models.

Keywords: concrete creep, creep compliance measure, reinforced concrete, nonlinear deformation model, SP 63.13330, long-term strains, stress relaxation, force redistribution, numerical algorithms, verification

For citation: Eremeev P.V., Eremeev D.V., Shmelev G.N. Accounting for concrete creep in the analysis of reinforced concrete structures using the nonlinear deformation model of SP 63.13330. *Concrete and Reinforced Concrete*, 2026, no. 2 (633), pp. 37–50. (In Russian). DOI: [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2\(633\)-37-50](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-2(633)-37-50).

Authors contribution statement

P.V. Eremeev, G.N. Shmelev, D.V. Eremeev – research concept, problem statement, development of the methodology and calculation algorithms.

G.N. Shmelev – scientific supervision.

P.V. Eremeev, D.V. Eremeev – software implementation of the algorithms in the “NDM+” software package.

D.V. Eremeev – literature review, preparation and processing of experimental data, performing numerical

calculations, comparison with experimental results, error analysis, and manuscript preparation.

Funding

No funding support was obtained for the research.

Conflict of interest

The authors declares no conflict of interest.

Received 11.01.2026

Revised 17.02.2026

Accepted 05.03.2026

1. Введение

Ползучесть бетона, выражающаяся в нарастании деформаций во времени при длительном нагружении, обусловлена реологической природой материала. Данный фактор существенно влияет на напряженно-деформированное состояние (НДС), жёсткость и трещиностойкость железобетонных конструкций, что проявляется, в частности, в следующем:

- рост прогибов и кривизны элементов вследствие увеличения деформаций;
- перераспределение напряжений в сечении (рост доли усилий, воспринимаемых арматурой);
- перераспределение внутренних усилий в статически неопределимых системах вследствие условий совместности деформаций;
- снижение трещиностойкости (развитие существующих трещин и образование новых);
- потери предварительного напряжения.

Интенсивность и скорость развития ползучести зависят не только от уровня напряжений и длительности действия нагрузки, но и от состава бетонной смеси, условий её твердения и эксплуатации конструкций. Среди наиболее значимых факторов выделяют водоцементное отношение, масштабный фактор, влажность окружающей среды, уровень напряжений в бетоне, возраст бетона в момент загрузки, наличие микротрещин и жёсткость крупного заполнителя. При этом отмечается, что ползучесть бетона, загруженного в молодом возрасте, как правило, развивается интенсивнее, чем при загрузке в более зрелом возрасте [1, 2].

Длительные деформации бетона при расчётах железобетонных конструкций описывают с использованием теорий ползучести, которые условно можно разделить на три основные группы [3]:

- теория упругой наследственности (деформации определяются историей действия нагрузки и временем её приложения);
- теория старения (существенную роль играет возраст бетона при загрузке);
- наследственная теория старения Г.Н. Маслова и Н.Г. Арутюняна (учитывается одновременно история нагружения и старение бетона).

Несмотря на наличие развитых реологических моделей бетона, описывающих ползучесть во времени с учётом многих факторов, в практике проектирования железобетонных конструкций обычно используют упрощённый инженерный подход: ползучесть учитывают через введение коэффициента ползучести бетона $\varphi_{b,cr}$ и допущение линейной зависимости между напряжениями и деформациями на эксплуатационных уровнях нагружения; при этом линейность для сжатия, как правило, принимают допустимой до напряжений порядка половины призменной прочности бетона [4, 5]. Величину $\varphi_{b,cr}$ определяют по формуле (1) как отношение приращения деформаций за период действия длительной нагрузки к первоначальной упругой деформации:

$$\varphi_{b,cr}(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, t_0)}{\varepsilon_0(t_0)}. \quad (1)$$

Значение этого коэффициента в расчётах назначают по СП 63.13330 с учётом класса бетона и влажностных условий среды.

В нелинейной деформационной модели (НДМ) расчёт железобетонных элементов ведут по нормальному сечению на основе диаграмм деформирования бетона и арматуры, гипотезы плоских сечений и уравнений равновесия внешних и внутренних усилий. При учёте длительного действия нагрузки в соответствии с СП 63.13330 деформационные характеристики бетона в диаграммах изменяются: характерные относительные деформации принимают по табл. 6.10 в зависимости от влажности среды, а расчетный модуль деформаций бетона снижается по формуле (2):

$$E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}, \quad (2)$$

где E_b – начальный модуль упругости бетона при сжатии и растяжении.

Для более строгого описания ползучести, помимо нормативного коэффициента $\varphi_{b,cr}$, целесообразно вводить меру ползучести $C(t, t_0)$, что позволяет отдельно учитывать упругую и длительную части деформаций. В частности, В.Г. Назаренко и соавт. подчёркивают, что согласно ГОСТ 24452–80 и ГОСТ 24544–81 «мера, или податливость» общих относительных деформаций при простом нагружении задаётся через упругий вклад и меру простой ползучести, что удобно для построения уравнений состояния материала [6]. В реологической записи полная податливость может быть представлена выражением (3):

$$\delta(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0), \quad (3)$$

где $C(t, t_0)$ – мера ползучести, t_0 – момент приложения постоянной нагрузки, $E(t_0)$ – модуль упругости бетона в момент загрузки [7, 8].

Указанная форма задания ползучести через $C(t, t_0)$ согласуется с практикой расчётов по СП 35.13330, где для оценки деформаций используются удельные деформации ползучести, что фактически соответствует применению меры ползучести.

Следует учитывать, что при разгрузке бетон восстанавливает деформации не полностью, то есть длительные деформации имеют необратимую составляющую; поэтому расчёт с «упругой разгрузкой» без отдельного выделения мгновенной и длительной частей затрудняет корректное моделирование циклического нагружения. В этой связи в отечественных рекомендациях по учёту усадки и ползучести подчёркивается удобство использования меры ползучести в единой форме как для нарастающих, так и для убывающих во времени напряжений [9].

В то же время, как показано С.Б. Крыловым и П.Д. Арлениновым [10], непосредственное применение нормативной диаграммы деформирования бетона для длительных нагрузок в расчётах по НДМ может приводить к методическим несогласованностям. Использование такой диаграммы способно приводить

к завышению высоты сжатой зоны и, как следствие, к расхождениям с нормируемыми ограничениями по предельной относительной высоте сжатой зоны, а также к несогласованию с экспериментальными представлениями о предельных деформациях бетона при длительном нагружении. По оценке авторов, переход к длительным нагрузкам, реализуемый в своде правил путём масштабирования кратковременной диаграммы по оси деформаций с последующей корректировкой начального участка, носит компромиссный характер и может искажать деформационные характеристики бетона, увеличивая погрешности расчётов, связанных с ползучестью.

Более последовательный учёт ползучести путем корректирования диаграммы деформирования в расчётах по деформационной расчетной модели предлагается в работе [11] на основе построения так называемых диаграмм-изохрон деформирования бетона [12,13]. При этом полные деформации рассматриваются как сумма упругой составляющей и деформации ползучести, задаваемой через коэффициент ползучести $\varphi(t, t_0)$, по которому вводится эффективный модуль деформаций бетона. Для ряда расчётных уровней напряжений σ_c исходная кратковременная диаграмма преобразуется с учётом $\varphi(t, t_0)$, в результате чего формируются диаграммы $\sigma_c - \varepsilon_c(t, t_0)$ для заданных моментов времени (изохроны). Использование таких диаграмм в деформационной модели позволяет учитывать развитие длительных деформаций во времени.

На современном этапе развития механики железобетона прослеживается диалектический переход от традиционных интегральных моделей наследственности к дискретным пошаговым алгоритмам. Как отмечает В.М. Бондаренко [14], этот процесс обусловлен пониманием железобетона как сложной неравновесной системы с ярко выраженной режимно-наследственной спецификой деформирования. Реализация дискретных моделей позволяет преодолеть вычислительные трудности и физические противоречия классических теорий.

С учетом вышеизложенного, традиционный инженерный подход, сводящийся к упрощенной корректировке диаграммы деформирования бетона, имеет ряд существенных ограничений:

- в рамках одного расчёта по НДМ отсутствует возможность явно разделить длительные нагрузки, сопровождающиеся развитием ползучести, и кратковременные воздействия;
- отсутствует возможность проследить за изменением напряжений с течением времени;
- в результатах расчёта, как правило, не выделяются отдельно мгновенные и длительные деформации, что затрудняет последующий анализ НДС;
- возникает сложность при циклическом расчёте с упругой разгрузкой, требующем корректного описания циклической работы материала;
- осложнено применение сложных реологических моделей ползучести, которые затруднительно свести к модификации диаграммы деформирования;

– затруднён учёт мгновенной ползучести и восстановления ползучести при разгрузке.

Представляется, что более корректные результаты и расширенные возможности для расчётного анализа может обеспечить подход, при котором ползучесть учитывается не через изменение диаграммы деформирования, а путём модификации численного алгоритма НДМ. В связи с этим целью настоящей работы является разработка алгоритмов учёта ползучести на основе меры ползучести в расчётах по НДМ СП 63.13330 и его верификация по опубликованным экспериментальным данным по железобетонным элементам.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- сформулировать расчётные соотношения учёта ползучести в итерационном цикле НДМ;
- разработать и сравнить численные схемы, различающиеся способом аппроксимации приращений ползучести и учётом релаксации напряжений;
- реализовать алгоритмы в программном модуле и выполнить сопоставление с экспериментальными кривыми длительных деформаций и перераспределения напряжений.

2. Методы и материалы

Ранее авторами были опубликованы дополнения к уравнениям нелинейной деформационной модели [15,16] с целью определения НДС сечений с возможностью учета неограниченного числа стадий нагружения (разгрузки) произвольными усилиями (N , M_x , M_y), стадий усиления и стадий преднапряжения в рамках единых соотношений. На базе указанных уравнений в настоящей работе предлагается подход к учёту ползучести бетона, встраиваемый в стандартный итерационный расчёт НДМ и реализуемый на уровне элементарных площадок сечения путём задания ползучести в виде собственных деформаций. В качестве входной реологической характеристики используется приращение меры ползучести на временном интервале стадии, определяемое по формуле (4). Оно может задаваться по нормативной зависимости, принятой реологической модели либо по экспериментальным данным.

$$\Delta C_n = C(t_n, t_0) - C(t_{n-1}, t_0) \quad (4)$$

Для практической реализации предложенного подхода разработаны три численных алгоритма. Общим для них является вложенная итерация ползучести, выполняемая на уровне элементарных площадок сечения внутри каждой внешней итерации НДМ и обеспечивающая согласование σ и $\Delta \varepsilon_{cr}$. Алгоритмы различаются способом аппроксимации приращений ползучести и степенью дискретизации временного интервала, что определяет баланс между вычислительной эффективностью и точностью учёта релаксации напряжений:

1. Итерационный учёт ползучести без интегрирования по напряжениям.
2. Интегральный учёт ползучести по напряжениям на стадии (метод трапеций, с опорным состоянием).

3. Пошаговый (стадийный) учёт ползучести с разбиением по времени и обновлением опорных напряжений.

Алгоритм 1. Приращение деформаций ползучести на текущей стадии принимается по формуле (5) линейно зависимым от напряжений в элементарной площадке сечения:

$$\Delta \varepsilon_{cr} = \sigma_i \Delta C_n \quad (5)$$

где ΔC_n – приращение меры ползучести на временном интервале n -й стадии, σ_i – искомое напряжение, $\Delta \varepsilon_{cr,i}$ – искомое приращение деформации ползучести.

Шаг 1. Начальное приближение жёсткостных характеристик

На первом шаге принимаются коэффициенты секционных модулей единичными:

$$v_i = 1$$

По значениям v_i формируются коэффициенты жёсткости сечения $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{22}, D_{23}, D_{33}$.

Шаг 2. Решение уравнений равновесия на приращениях усилий

При заданных приращениях внешних усилий $\Delta N, \Delta M_x, \Delta M_y$ составляется и решается система линейных уравнений НДМ относительно кинематических приращений:

$$\Delta \varepsilon_0, \Delta \left(\frac{1}{r_x} \right), \Delta \left(\frac{1}{r_y} \right)$$

Шаг 3. Обновление распределения деформаций по сечению

Для каждой элементарной площадки i вычисляются полные относительные деформации ε_i на текущем итерационном шаге.

Шаг 4. Вложенный итерационный цикл учёта ползучести

Для согласования напряжений и деформаций ползучести выполняется вложенный итерационный процесс. В пределах вложенного цикла полные деформации ε_i , полученные на шаге 3, считаются заданными.

$$\max_i |\sigma_i^k - \sigma_i^{k-1}| < [\sigma],$$

Шаг 5. Проверка точности равновесия

После завершения вложенного цикла оценивается выполнение условий равновесия сечения. Внутренние усилия должны соответствовать внешним на-

$$N = N^{old} + \Delta N, \quad M_x = M_x^{old} + \Delta M_x, \quad M_y = M_y^{old} + \Delta M_y.$$

Проверка равновесия выполняется по соотношениям (11):

$$\begin{aligned} N &\approx \sum_i \sigma_i A_i, \\ M_x &\approx \sum_i \sigma_i A_i Z_{x,i}, \\ M_y &\approx \sum_i \sigma_i A_i Z_{y,i}. \end{aligned} \quad (11)$$

На k -й итерации вложенного цикла вычисляются:

1. приращение ползучести по формуле (6):

$$\Delta \varepsilon_{cr,i}^{calc,k} = \sigma_i^{k-1} \Delta C_n, \quad (6)$$

где i – номер расчетной площадки; $k, k-1$ – верхние индексы, обозначающие номер вложенной итерации ползучести соответственно.

Для обеспечения вычислительной устойчивости вложенного итерационного цикла используется процедура демпфирования. Приращение деформаций ползучести на k -й итерации определяется по формуле (7) как средневзвешенное значение между теоретически вычисленным приращением $\Delta \varepsilon_{cr,i}^{calc,k}$ и значением, полученным на предыдущей итерации $\Delta \varepsilon_{cr,i}^k$, с использованием параметра демпфирования λ :

$$\Delta \varepsilon_{cr,i}^k = \lambda \Delta \varepsilon_{cr,i}^{calc,k} + (1 - \lambda) \Delta \varepsilon_{cr,i}^{k-1}, \quad (7)$$

где λ – параметр демпфирования.

2. Мгновенная составляющая деформации определяется по формуле (8):

$$\varepsilon_{inst,i}^k = \varepsilon_i - \varepsilon_{cr,i}^{old} - \Delta \varepsilon_{cr,i}^k. \quad (8)$$

Параметр $\varepsilon_{cr,i}^{old}$ представляет собой значение накопленной деформации ползучести i -й площадки сечения, полученной на всех предшествующих стадиях нагружения (при их наличии).

3. Напряжение определяется по диаграмме деформирования согласно формуле (9):

$$\sigma_i^k = f(\varepsilon_{inst,i}^k), \quad (9)$$

где $f(\varepsilon_{inst,i}^k)$ – диаграмма деформирования материала, применяемая к мгновенной составляющей деформаций $\varepsilon_{inst,i}^k$.

Вложенный цикл ползучести продолжается до выполнения условий (10):

$$\max_i |\Delta \varepsilon_{cr,i}^k - \Delta \varepsilon_{cr,i}^{k-1}| < [\varepsilon], \quad (10)$$

грузкам, заданным для текущей стадии. Если стадия задана приращениями, то полные значения внешних нагрузок определяются суммированием:

Шаг 6. Уточнение текущих модулей и повтор внешней итерации

Если заданная точность равновесия не достигнута, текущие модули v_i уточняются с применением адаптивного коэффициента демпфирования $\alpha_v \in [0,5; 1,0]$ значение которого определяется интенсивностью реологического процесса на стадии (ΔC_n). Это обеспечивает стабильную сходимость при значительной релаксации напряжений и больших значениях меры ползучести.

Алгоритм 2 предназначен для моделирования НДС на этапах длительного нагружения без деталь-

ной дискретизации временного интервала. В отличие от Алгоритма 1, здесь приращение деформаций ползучести определяется путём интегрирования напряжений по методу трапеций, что позволяет учитывать их релаксацию внутри стадии.

Для каждой i -й площадки приращение деформации ползучести $\Delta \varepsilon_{cr,i}$ вычисляется по формуле (12) через среднее значение напряжений на интервале:

$$\Delta \varepsilon_{cr,i} = \bar{\sigma}_i \cdot \Delta C_n, \text{ где } \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_{ref,i} + \sigma_i}{2} \quad (12)$$

Здесь:

- $\sigma_{ref,i}$ – опорные (условно-мгновенные) напряжения, полученные в предварительном расчёте НДМ без учёта ползучести для текущей стадии. Напряжения, возникающие непосредственно при приложении нагрузки;

- σ_i – искомые напряжения на текущей итерации основного расчёта с учётом релаксации, вызванной ползучестью.

Мгновенная составляющая деформации $\varepsilon_{inst,i}$, используемая для определения напряжений по диаграмме состояния материала $f(\varepsilon_{inst,i})$, вычисляется с учётом накопленной и текущей ползучести аналогично формуле (8).

Реализация алгоритма включает два последовательных этапа:

1. Опорный этап: выполнение расчёта НДМ для определения напряжений $\sigma_{ref,i}$, соответствующих приложению нагрузки на стадии без развития реологических процессов.

2. Итерационный этап: основной расчёт с включением вложенного цикла ползучести (аналогично Алгоритму 1). На каждой итерации производится уточнение $\Delta \varepsilon_{cr,i}$ и σ_i до достижения равновесия сечения по внешним усилиям.

Алгоритм 3 (пошаговый учёт с разбиением по времени) является развитием алгоритма 2. В отличие от алгоритма 2, где интегрирование по напряжениям выполняется на одном временном интервале стадии, в алгоритме 3 интервал длительного нагружения $[t_{n-1}, t_n]$ разбивается на m подинтервалов, что позволяет последовательно обновлять напряжённое состояние.

Для каждого подшага $j = 1, \dots, m$ определяется приращение меры ползучести $\Delta C_{n,j}$ согласно принятой реологической модели $C(t)$. Приращение деформации ползучести i -й площадки на текущем подшаге вычисляется по формуле (13):

$$\Delta \varepsilon_{cr,i}^{n,j} = \frac{\sigma_{ref,i}^{n,j} + \sigma_i^{n,j}}{2} \cdot \Delta C_{n,j}, \quad (13)$$

где опорное напряжение $\sigma_{ref,i}^{n,1}$ последовательно обновляется согласно формуле (14) и принимается равным результату расчёта на предыдущем подшаге:

$$\sigma_{ref,i}^{n,1} = \sigma_i(t_{n-1}); \sigma_{ref,i}^{n,j} = \sigma_i^{n,j-1} \text{ для } j \geq 2 \quad (14)$$

Итоговое значение деформации ползучести к концу стадии определяется по формуле (15) суммированием накопленных приращений:

$$\varepsilon_{cr,i}(t_n) = \varepsilon_{cr,i}(t_{n-1}) + \sum_{j=1}^m \Delta \varepsilon_{cr,i}^{n,j}. \quad (15)$$

Таким образом, основные отличия алгоритма 3 от алгоритма 2 состоят в:

1. разбиении временного интервала на подшаги по ΔC (или по времени);
2. последовательном обновлении опорных напряжений σ_{ref} после каждого подшага;
3. накоплении деформаций ползучести суммированием $\Delta \varepsilon_{cr}$ по подшкагам.

2.1. Программная реализация

Численная реализация предложенных алгоритмов выполнена в виде специализированного расчетного модуля, интегрированного в авторский программный комплекс «НДМ+» [17]. Данный комплекс предназначен для анализа НДС нормальных сечений при сложном стадийном нагружении (разгрузке) и позволяет моделировать историю работы элемента с учетом физической нелинейности материалов.

Функциональные возможности комплекса позволяют описывать геометрию произвольных сечений, состоящих из различных частей, для каждой из которых индивидуально назначаются параметры материала и стадия активации в расчете. Интеграция описанных алгоритмов в итерационный цикл НДМ обеспечивает гибкость при решении сложных прикладных задач. В частности, стадийный учет накопленных собственных деформаций позволяет моделировать ситуации, когда сечение усиливается наращиванием сжатой зоны бетона под нагрузкой. В этом случае ползучесть проявляется в разных частях сечения последовательно: сначала в основном бетоне в ранний период, а затем в бетоне усиления – в поздний.

Для каждой стадии пользователь может задать параметры внешней нагрузки, количество подшагов и соответствующую меру ползучести. Разработанный модуль обеспечивает выбор расчетной схемы (Алгоритмы 1–3) в зависимости от типа задачи и требуемой точности.

Для оценки корректности работы программной реализации и точности предлагаемых алгоритмов необходима их верификация на независимых экспериментальных данных. В следующем разделе выполнено сопоставление результатов численного моделирования с результатами длительных лабораторных испытаний железобетонных элементов.

3. Верификация

В качестве верификационных примеров для предложенных алгоритмов учёта ползучести выбраны результаты длительных испытаний железобетонных призматических элементов, моделирующих

центрально сжатые колонны, проведённых в лаборатории им. Магнеля Гентского университета и первоначально представленных в работах Н. Lambotte и соавт. [18,19]; сводное описание, длительные наблюдения и численный анализ приведены в работе [20]. В эксперименте исследовалось перераспределение напряжений между бетоном и арматурой и развитие осевых деформаций вследствие совместного действия ползучести и усадки бетона при длительном центральном сжатии.

3.1. Описание экспериментальных образцов

Экспериментальная программа включала испытания 16 бетонных призм с размерами сечения 140×150 мм и длиной 4 000 мм (рис. 1). Бетон имел водоцементное отношение порядка 0,46 и среднюю кубиковую прочность в возрасте 28 суток $R = 47,4$ МПа. Начальный модуль упругости бетона E_b был определен в рамках настоящей работы по экспериментальным графикам деформирования неармированных образцов (как отношение напряжения к величине мгновенной упругой деформации) и составил в среднем 25000 МПа.

После распалубки каждая призма устанавливалась в испытательную раму на две опоры. Расстояние между опорами подбиралось таким образом, чтобы изгибающие моменты от собственного веса над опорами и в середине пролёта имели одинаковое (минимальное) значение.

В серии варьировались два основных параметра: процент рабочего армирования (0; 1,5; 3 и 6 % площади сечения бетона) и уровень заданного среднего напряжения в бетоне (0; 5; 10 и 15 МПа). Обозначение образцов принято в виде $W\mu-\sigma$, где μ – процент армирования, σ – расчётное среднее напряжение в бетоне; например, $W0-0$ – неармированный образец без внешней нагрузки.

Таким образом, было реализовано 16 сочетаний (рис. 2), по одному образцу на каждое сочетание параметров. Нагрузка прикладывалась в возрасте 28 суток посредством системы пост-напряжения канатами, не имеющими сцепления с бетоном, обеспечивающей центральное сжатие.

3.2. Обработка экспериментальных данных

Для сопоставления с расчётами экспериментальные кривые «осевая деформация–время» были предварительно обработаны. В качестве эталона свободной усадки принята деформация неармированной ненагруженной призмы $W0-0$. Для неармированных нагруженных серий $W0-\sigma$ ($\sigma = 5, 10, 15$ МПа) из полной деформации вычиталась усадка $W0-0$, после чего исключался мгновенный упругий скачок в момент нагружения ($t_0 = 28$ суток); полученная длительная составляющая, отнесённая к уровню напряжения, использовалась для построения трёх зависимостей меры ползучести. Для армированных нагруженных серий $W\mu-\sigma$ ($\mu = 1.5, 3, 6$ %) из экспериментальных деформаций также вычиталась усадка $W0-0$; полученные девять кривых (уп-

ругая часть с ползучестью при совместной работе бетона и арматуры) непосредственно сравнивались с результатами расчётов по алгоритмам 1–3.

Сопоставление расчётов с экспериментом выполнялось по обработанным кривым деформаций в контрольные сроки $t = 28, 100, 1000, 4000$ суток с использованием логарифмической шкалы времени. При сравнении оценивались уровень деформаций и влияние параметров σ и μ ; в расчётной модели принимались центральное сжатие и совместность деформаций бетона и рабочей арматуры (идеальное сцепление) в соответствии с постановкой испытаний [20].

3.3. Анализ результатов сопоставления

Для оценки точности разработанных алгоритмов в составе программного комплекса «НДМ+» проведено сопоставление расчетных значений осевых деформаций с результатами длительных испытаний.

На рисунке 3 представлены графики развития полных осевых деформаций (сумма мгновенных упругих деформаций и деформаций ползучести) во времени для уровней армирования 1,5 %, 3,0 % и 6,0 %.

Для количественной оценки точности разработанных алгоритмов в таблице 1 представлены относительные погрешности расчетов (%) для наиболее репрезентативных серий образцов, охватывающих весь диапазон уровней армирования и загрузки, в контрольные сроки: 100, 1000 и 4000 суток.

Анализ сопоставления расчетных и опытных данных (рис. 3 и табл. 1) позволил выявить ряд ключевых закономерностей. В момент приложения нагрузки ($t = 28$ сут) погрешность всех предложенных алгоритмов практически отсутствует. В процессе дальнейшего длительного деформирования количественный анализ показал преимущество Алгоритмов 2–3, которые на протяжении всего двенадцатилетнего периода наблюдений удерживают погрешность в пределах 1–7 % для большинства серий. В то же время Алгоритм 1 демонстрирует систематическое занижение деформаций на поздних сроках, достигающее 12,27 %, что обусловлено менее строгим учетом перераспределения напряжений между бетоном и арматурой во времени.

Предложенные расчетные модели адекватно описывают физику реологического процесса: наиболее интенсивный рост деформаций фиксируется в первые 100–200 суток после нагружения, после чего кривые принимают затухающий характер, полностью соответствуя экспериментальным кривым. При этом установлено, что с ростом степени армирования сечения погрешность расчетов имеет тенденцию к увеличению. Тем не менее, сохранение хорошего совпадения формы расчётных и экспериментальных кривых на всем интервале времени подтверждает работоспособность предложенных моделей даже в условиях сильного стеснения деформаций бетона арматурой.

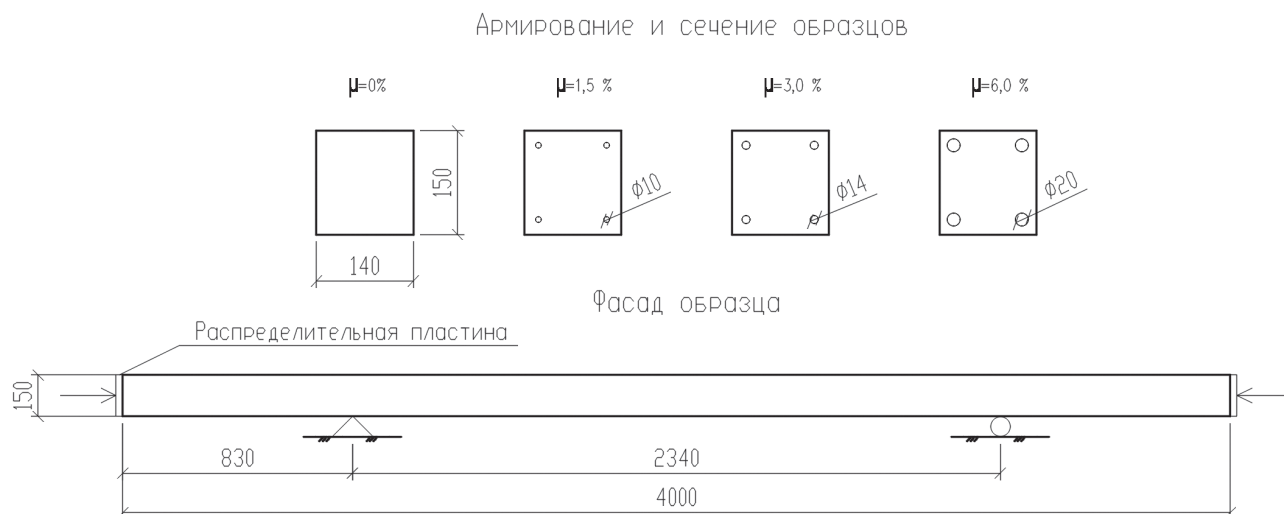


Рис. 1. Общие виды образца [20] (отверстия под постнатянутую арматуру не показаны)
Fig. 1. General views of the specimen [20] (holes for post-tensioning reinforcement are not shown)

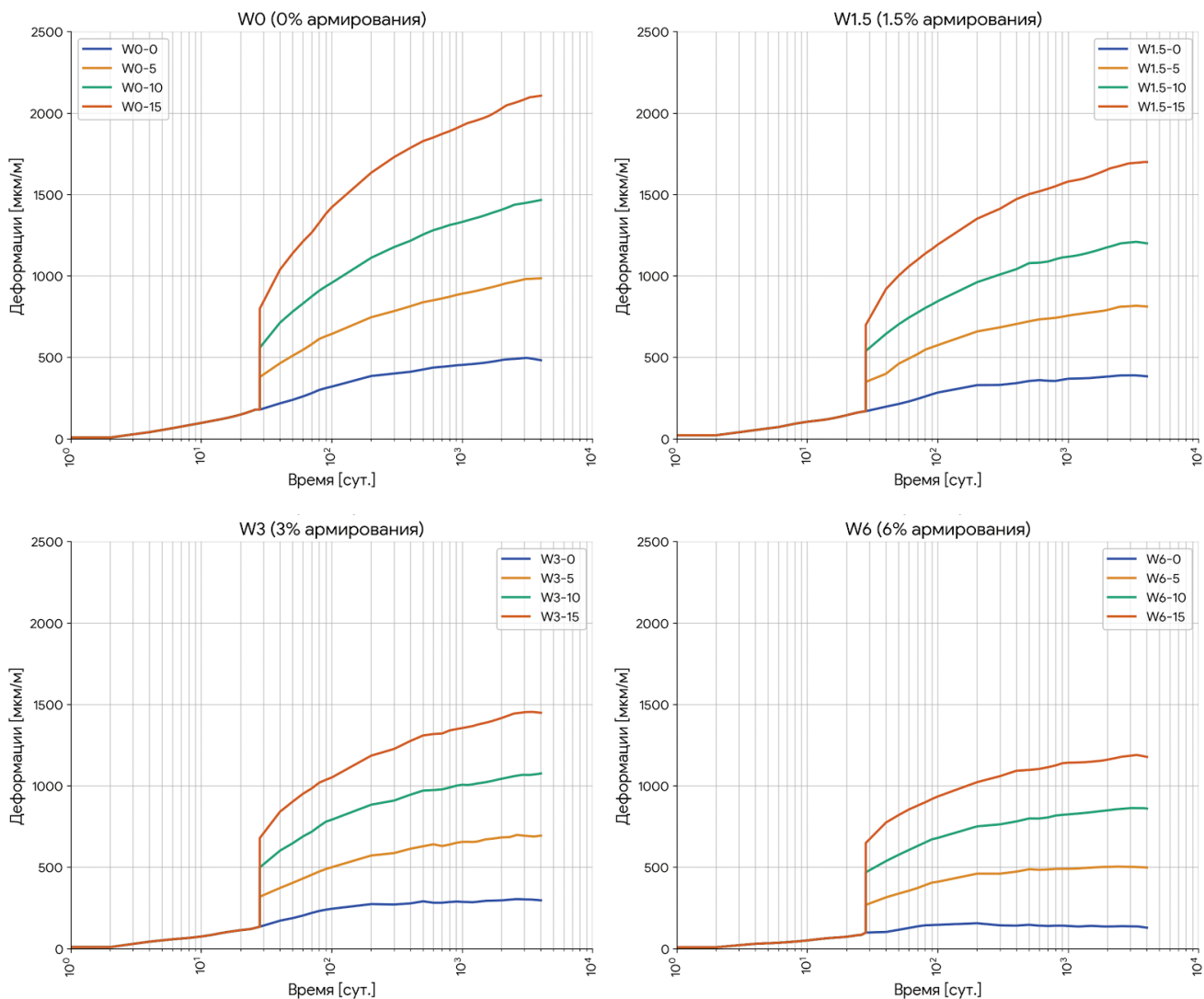


Рис. 2. Кривые «осевая деформация–время» по результатам испытаний образцов [20]
Fig. 2. “Axial strain–time” curves based on specimen test results [20]

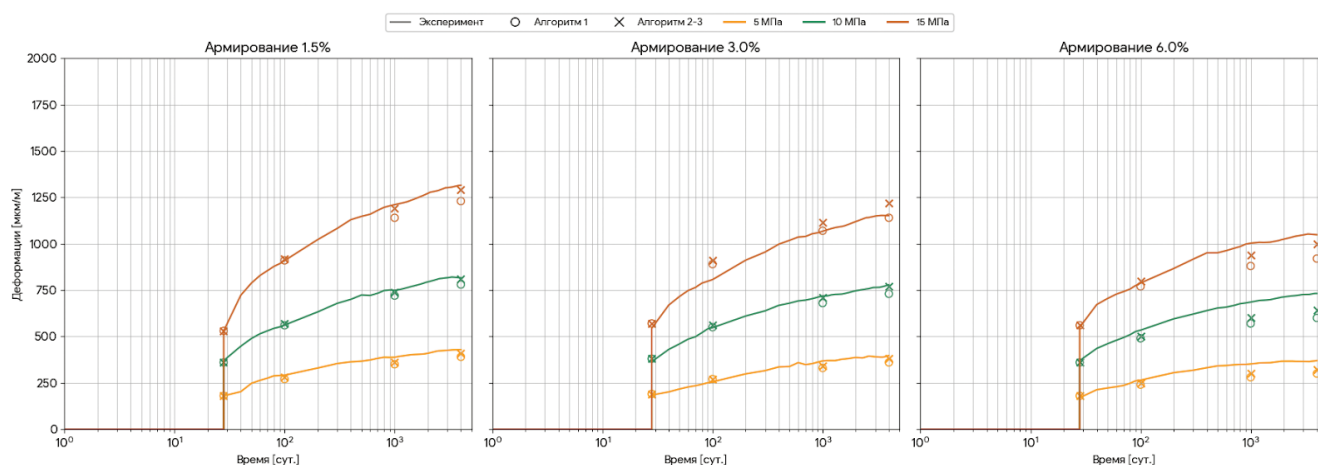


Рис. 3. Сопоставление расчетных и экспериментальных деформаций при $\mu = 1,5\%$, $\mu = 3,0\%$ и $\mu = 6,0\%$
Fig. 3. Comparison of calculated and experimental strains at $\mu = 1,5\%$, $\mu = 3,0\%$ and $\mu = 6,0\%$

Таблица 1

Относительная погрешность расчета осевых деформаций (%)

Table 1

Relative error of axial strain calculation (%)

Образец (армирование, нагрузка)	Алгоритм	$t = 100$ сут	$t = 1000$ сут	$t = 4000$ сут
W1,5-5 ($\mu=1,5\%$, 5 МПа)	Алг. 1	-7.27	-9.68	-9.02
	Алг. 2-3	-3.84	-7.1	-4.35
W1,5-10 ($\mu=1,5\%$, 10 МПа)	Алг. 1	-0.26	-3.87	-4.46
	Алг. 2-3	1.52	-1.2	-0.78
W1,5-15 ($\mu=1,5\%$, 15 МПа)	Алг. 1	0.12	-5.85	-6.51
	Алг. 2-3	1.22	-1.72	-1.95
W3,0-10 ($\mu=3,0\%$, 10 МПа)	Алг. 1	0.48	-5.41	-6.26
	Алг. 2-3	2.31	-1.23	-1.12
W6,0-15 ($\mu=6,0\%$, 15 МПа)	Алг. 1	-2.31	-12.24	-12.27
	Алг. 2-3	1.49	-6.26	-4.64

Примечание: знак «-» соответствует занижению расчетных деформаций относительно эксперимента, «+» – завышению.

Результаты численного анализа по разработанному Алгоритму 2 позволили проследить перераспределение напряжений в сечении на всем 12-летнем интервале наблюдений (рис. 4). Установлено, что во всех исследованных сериях наблюдается интенсивное перераспределение усилий с бетона на рабочую

арматуру, обусловленное релаксацией напряжений в бетоне. Динамика процесса характеризуется высокой интенсивностью в начальный период (до 500 суток), на который приходится до 70 % общего объема перераспределения усилий, с последующим затуханием и выходом кривых на асимптоту.

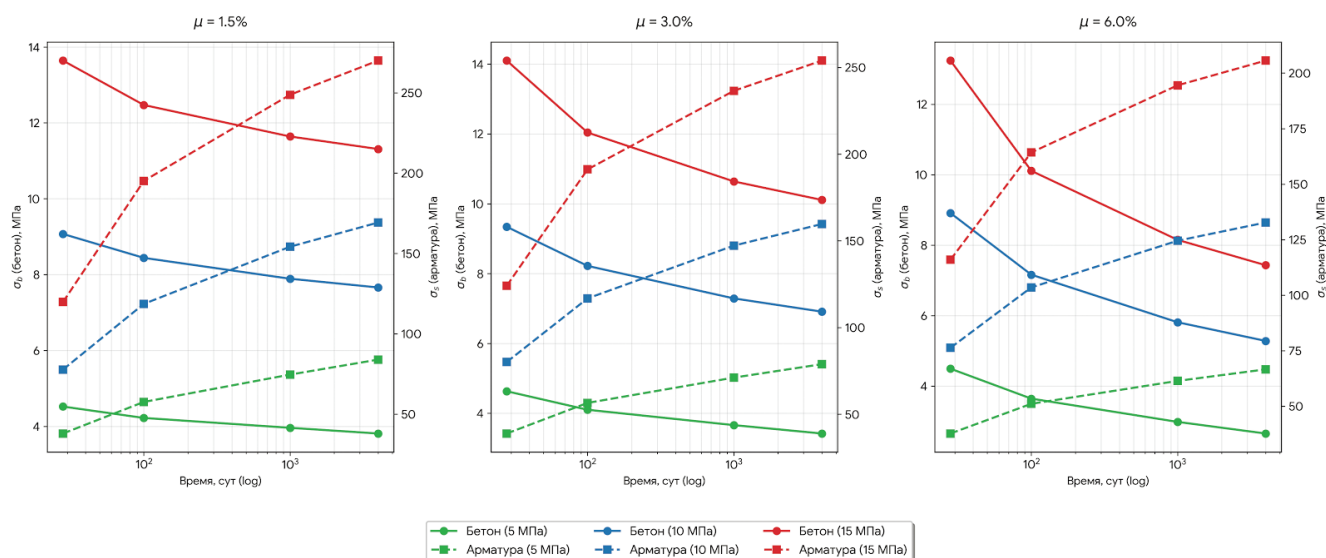


Рис. 4. Перераспределение напряжений в сечениях при коэффициенте армирования 1,5 %, 3,0 % и 6,0 %
Fig. 4. Stress redistribution in cross-sections at reinforcement ratios of 1.5 %, 3.0 %, and 6.0 %

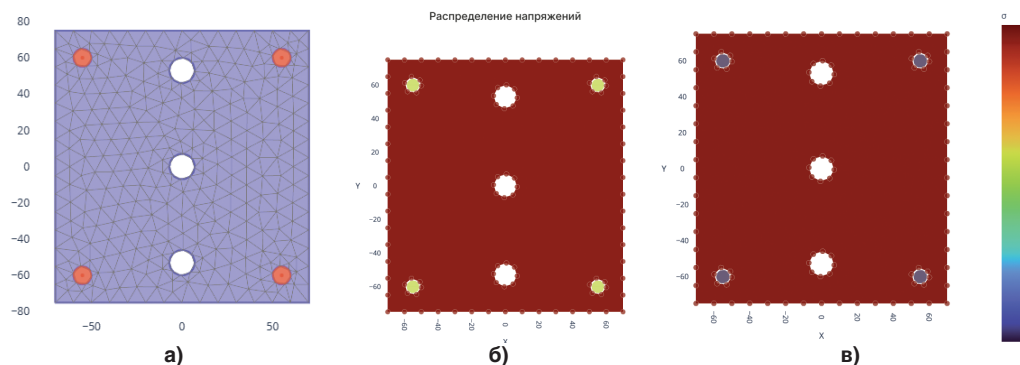


Рис. 5. Численная модель образца W1,5–15 в ПК «НДМ+»: а) триангуляция нормального сечения; б) распределение напряжений в бетоне в момент загрузки; в) распределение напряжений с учетом 12-летней ползучести
Fig. 5. Numerical model of specimen W1.5–15 in the NDM+ software package: (a) triangulation of the normal cross-section; (b) stress distribution in concrete at the time of loading; (c) stress distribution accounting for 12-year creep

Визуализация результатов расчета в ПК «НДМ+» наглядно подтверждает активное перераспределение усилий в сечении: за счет развития ползучести бетона напряжения в нем за 4000 суток снизились на 17,3 %, в то время как напряжения в продольной арматуре возросли на 135,5 % относительно первоначальных значений (рис. 5).

4. Обсуждение

Сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными данными длительных испытаний позволило не только подтвердить достоверность предложенных подходов, но и оценить эффективность различных схем учета ползучести в структуре нелинейной деформационной модели. Выявленные различия в точности между алгоритмами напрямую обусловлены математической природой аппроксимации интеграла ползучести. Так, Алгоритм 1, реализующий локальную итерационную зависимость, фактически базируется на методе прямоугольников. В услови-

ях активного перераспределения внутренних усилий с бетона на арматуру напряжения в бетонном сечении непрерывно снижаются. Использование в расчете конечного (минимального на шаге) значения напряжений ведет к систематическому накоплению методической ошибки в сторону занижения деформаций ползучести.

Напротив, алгоритмы 2 и 3, основанные на методе трапеций, оперируют средним значением напряжений между опорным и искомым состояниями на временном интервале. Обеспечивая второй порядок точности аппроксимации, данные схемы позволяют более корректно моделировать релаксацию напряжений в бетоне. Это выражается в высокой сходимости с экспериментальными данными: для большинства исследованных серий погрешность не превысила 2–4 %.

Алгоритмы 2 и 3 показали схожую точность. Тем не менее функциональное преимущество алгоритма 3 становится решающим в задачах со сложной историей нагружения или изменением расчетных схем. В таких случаях стадийный учет накопленных

собственных деформаций является возможным способом корректного описания НДС, особенно при моделировании поэтапного возведения или усиления конструкций под нагрузкой.

Предложенный метод обладает рядом преимуществ перед упрощенным масштабированием нормативных диаграмм состояния по оси деформаций. Обеспечивается высокая физическая достоверность за счет явного разделения мгновенных силовых и длительных реологических составляющих деформаций на каждом этапе. Модификация численного алгоритма НДМ обеспечивает гибкость в выборе реологических характеристик. В качестве входных данных может быть использована мера ползучести, полученная любым способом: от нормативных зависимостей до прямых массивов экспериментальных данных.

5. Заключение

На основании проведенных исследований получены следующие выводы:

1. Разработаны и теоретически обоснованы три алгоритма учета ползучести бетона в рамках нелинейной деформационной модели, основанные на введении деформаций ползучести в виде переменных во времени собственных деформаций элементарных площадок.

2. Показано, что использование метода трапеций для интегрирования приращений деформаций ползучести обеспечивает существенно более высокую точность (погрешность на уровне 1–7 %) по сравнению с локальными итерационными схемами за счет учета релаксации напряжений в бетоне.

3. Верификация на результатах 12-летних испытаний железобетонных образцов подтвердила высокую достоверность предложенной модели для эксплуатационных уровней нагружения при различных коэффициентах армирования.

4. Подтверждена универсальность метода, позволяющего интегрировать в расчетный цикл НДМ реологические модели или непосредственно результаты экспериментальных исследований без потери точности, что делает его применимым для анализа конструкций из перспективных материалов с уникальными свойствами ползучести.

5. Предложенные подходы позволяют расширить расчетный потенциал нелинейной деформационной модели, заложенной в СП 63.13330, обеспечивая переход от упрощенного масштабирования диаграмм состояния к строгому пошаговому учету реологических процессов без потери вычислительной устойчивости алгоритма.

6. Несмотря на высокую сходимость результатов в рамках решенной задачи, отмечена необходимость дальнейшей верификации предложенных алгоритмов для элементов с более сложным напряжённо-деформированным состоянием, где развитие деформаций ползучести сопровождается не только перераспределением напряжений, но и прогрессирующим изменением кривизны, эксцентриситетов и возможным смещением нейтральной оси сечения.

Список литературы

1. Домарова Е.В. Влияние ползучести на напряженно-деформированное состояние железобетонных многоэтажных зданий // *Строительство и реконструкция*. 2022. № 3 (101). С. 14–22. DOI: <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-101-3-14-22>.
2. Байбурин А.Х. Исследования прочности и деформативности тяжелого бетона при раннем нагружении // *Инженерный вестник Дона*. 2022. № 6. С. 430–437.
3. Тамразян А.Г., Есаян С.Г. Механика ползучести бетона. М.: МГСУ, 2012. 524 с.
4. Александровский С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). М.: Стройиздат, 1973. 432 с.
5. Истомин А.Д., Веретенникова А.Э. Влияние уровня нагружения на коэффициент ползучести бетона // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура*. 2023. Т. 23. № 4. С. 19–26. DOI: <https://doi.org/10.14529/build230402>.
6. Назаренко В.Г., Звездов А.И., Ларионов Е.А., Квасников А.А. Некоторые аспекты теории ползучести бетона // *Бетон и железобетон*. 2021. № 1(603). С. 40–43. URL: <https://www.bzhb.ru/jour/article/view/10?ysclid=mo8kz5pmp847254701>
7. Крылов С.Б., Арленинов П.Д. Современные исследования в области теории ползучести бетона // *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2018. № 1(16). С. 67–75. EDN: YNSGCY
8. Загрядский И.И. Алгоритм численного определения деформаций бетона с учетом ползучести на основе его известных напряжений. Уточнение свойств мер релаксации и мер ползучести молодого бетона // *Известия Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники им. Б.Е. Веденеева*. 2014. Т. 273. С. 96–107.
9. Бондаренко В.М. О рекомендациях по учету усадки и ползучести бетона при расчете железобетонных конструкций // *Бетон и железобетон*. 1985. № 6. С. 11–12.
10. Крылов С.Б., Арленинов П.Д. Достоинства и недостатки нелинейной деформационной модели при расчёте прочности железобетонных конструкций // *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. 2025. Т. 72 № 2. С. 124–132. DOI: <https://doi.org/10.48612/NewsKSUA/72.11>
11. Лазовский Д.Н., Тур В.В., Глухов Д.О., Лазовский Е.Д. Учет ползучести и усадки бетона по СП 5.03.01–2020 при расчете железобетонных конструкций на основе деформационной расчетной модели // *Вестник Брестского государственного технического университета*. 2021. № 2 (125). С. 7–12. DOI: <https://doi.org/10.36773/1818-1212-2021-125-2-7-12>
12. Карпенко Н.И., Прокопович И.Е., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н., Яременко А.Ф. Учёт деформаций ползучести и длительного сопротивления

- ния бетона в методике диаграмм-изохрон // *Совершенствование методов расчёта статически неопределимых железобетонных конструкций: сб. науч. тр.* М.: НИИЖБ, 1987. С. 66–81.
13. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
 14. Бондаренко В.М. Диалектика механики железобетона // *Бетон и железобетон*. 2002. № 1. С. 24–27.
 15. Еремеев П.В., Еремеев Д.В., Еремеев В.П., Шмелев Г.Н. Нелинейная деформационная модель СП 63.13330 в стадийной постановке // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2024. № 3 (314). С. 36–50. DOI: <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.3.36.50>.
 16. Еремеев П.В., Шмелев Г.Н. Применение метода переменных параметров упругости при решении задач знакопеременного упруго-пластического нагружения металлических конструкций с учетом остаточных напряжений // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2023. № 6 (311). С. 2–10. DOI: <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2023.6.2.10>.
 17. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024661176 (Российская Федерация). НДМ плюс: № 2024619540: заявл. 26.04.2024; опублик. 16.05.2024 / П.В. Еремеев, Д.В. Еремеев; заявитель АО «СПЕЦРЕМПРОЕКТ».
 18. Lambotte H., Van Nieuwenburg D., Cocquyt F. Influence of Non-Prestressed Steel on Shrinkage and Creep Deformations and on Steel-Concrete Stress Redistribution. *Partial Prestressing, From Theory to Practice* / ed. by M.Z. Cohn. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986, vol. 2, pp. 45–56.
 19. Lambotte H., Van Nieuwenburg D., Taerwe L. Cracking and Crack Widths of Partially Prestressed Concrete Members. *Proceedings of the European Conference on Cracking of Concrete and Durability of Constructions (AFREM-CCE)*. Saint-Remy-Les-Cheveuse, 1988.
 20. Criel P., Caspeelee R., Reybrouck N., Matthys S., Taerwe L. Stress Redistribution of Concrete Prisms Due to Creep and Shrinkage: Long-Term Observations and Analysis. *CONCREEP 10. Vienna, Austria: American Society of Civil Engineers*, 2015, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784479346.017>
- ### References
1. Domarova E.V. Influence of creep on the stress-strain state of reinforced-concrete high-rise buildings. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*, 2022, vol. 101, no. 3, pp.14–22. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-101-3-14-22>.
 2. Baiburin A.Kh. Strength and deformability of heavy concrete under early-age loading. *Inzhenernyi vestnik Dona*, 2022, vol. 90, no. 6, pp. 430–437. (In Russian).
 3. Tamrazyan A.G., Esayan S.G. Mechanics of concrete creep. Moscow: MGSU; 2012. 524 p. (In Russian)
 4. Aleksandrovskii S.V. Design of concrete and reinforced concrete structures for temperature and moisture effects (including creep). Moscow: Stroizdat; 1973. 432 p. (In Russian)
 5. Istomin A.D., Veretennikova A.E. Effect of load level on the concrete creep coefficient. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta // Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2023, vol. 23, no. 4, pp.19–26. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14529/build230402>.
 6. Nazarenko V.G., Zvezdov A.I., Larionov E.A., Kvasnikov A.A. Some aspects of the theory of concrete creep. *Concrete and Reinforced Concrete*, 2021, vol. 603, no. 1, pp. 40–43. (In Russian). URL: <https://www.bzhhb.ru/jour/article/view/10?ysclid=mo8kz5pmpe847254701>
 7. Krylov S.B., Arleninov P.D. Current research in the field of concrete creep theory. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 67–75. (In Russian). EDN: YNSGCY
 8. Zagryadskii I.I. Algorithm for numerical evaluation of concrete strains accounting for creep based on known stresses. Refinement of relaxation and creep measures of early-age concrete. *Izvestiya Vserossiiskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta gidrotekhniki im. B. E. Vedeneeva*, 2014, vol. 273, pp. 96–107. (In Russian).
 9. Bondarenko V.M. On recommendations for accounting for concrete shrinkage and creep in the design of reinforced concrete structures. *Concrete and Reinforced Concrete*, 1985, no. 6, pp. 11–12. (In Russian).
 10. Krylov S.B., Arleninov P.D. Advantages and disadvantages of the nonlinear deformation model in the strength analysis of reinforced concrete structures. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2025, vol. 72, no. 2, pp. 124–132. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.48612/NewsKSUA/72.11>.
 11. Lazovskii D.N., Tur V.V., Glukhov D.O., Lazovskii E.D. Accounting for concrete creep and shrinkage according to SP 5.03.01–2020 in the analysis of reinforced concrete structures based on the deformation design model. *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2021, vol. 125, no. 2, pp. 7–12. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.36773/1818-1212-2021-125-2-7-12>.
 12. Karpenko N.I., Prokopovich I.E., Mukhamediev T.A., Petrov A.N., Yaremenko A.F. Accounting for creep strains and long-term concrete resistance using the isochrone diagram method. *Improvement of methods for analysis of statically indeterminate reinforced concrete structures: collected papers*, Moscow: NIIZhB; 1987, pp. 66–81. (In Russian).
 13. Karpenko N.I. General models of reinforced concrete mechanics. Moscow: Stroizdat; 1996. 416 p. (In Russian)
 14. Bondarenko V.M. Dialectics of reinforced concrete mechanics. *Concrete and Reinforced Concrete*, 2002, no. 1, pp. 24–27. (In Russian)
 15. Eremeev P.V., Eremeev D.V., Eremeev V.P., Shmelev G.N. Nonlinear deformation model of SP 63.13330 in a staged formulation. *Stroitel'naya*

- mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2024, vol. 314, no. 3, pp. 36–50. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.3.36.50>.
16. Ereemeev P.V., Shmelev G.N. Application of the variable elasticity parameters method to problems of alternating elastic–plastic loading of steel structures considering residual stresses. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2023, vol. 311, no. 6, pp. 2–10. (In Russian).
 17. Ereemeev P.V., Ereemeev D.V. Certificate of state registration of computer program No. 2024661176 (Russian Federation). NDM plyus. Application No. 2024619540; filed 2024–04–26; published 2024–05–16. Applicant: JSC “SPETSREMPROEKT”. (In Russian).
 18. Lambotte H., Van Nieuwenburg D., Cocquyt F. Influence of non-prestressed steel on shrinkage and creep deformations and on steel–concrete stress redistribution / Cohn M. Z., editor. *Partial Prestressing, From Theory to Practice*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers; 1986, vol. 2, pp. 45–56.
 19. Lambotte H., Van Nieuwenburg D., Taerwe L. Cracking and crack widths of partially prestressed concrete members. *Proceedings of the European Conference on Cracking of Concrete and Durability of Constructions (AFREM-CCE)*. Saint-Remy-Les-Cheveuse; 1988.
 20. Criel P., Caspeeel R., Reybrouck N., Matthys S., Taerwe L. Stress redistribution of concrete prisms due to creep and shrinkage: long-term observations and analysis. *CONCREEP 10. Vienna, Austria: American Society of Civil Engineers*; 2015, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784479346.017>.
- Информация об авторах /
Information about the authors**
- Еремеев Павел Валерьевич**, аспирант, ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», инженер АО «СПЕЦРЕМПРОЕКТ», Казань
Pavel V. Ereemeev, Postgraduate Student, Kazan State University of Architecture and Engineering; Engineer, JSC “SPETSREMPROEKT”, Kazan, Russian Federation.
- Еремеев Даниил Валерьевич***, аспирант, ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», инженер АО «СПЕЦРЕМПРОЕКТ», Казань
e-mail: eremeev_dv@inbox.ru
Daniil V. Ereemeev*, Postgraduate Student, Kazan State University of Architecture and Engineering; Engineer, JSC “SPETSREMPROEKT”, Kazan, Russian Federation
E-mail: eremeev_dv@inbox.ru
- Шмелев Геннадий Николаевич**, канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань
Gennady N. Shmelev, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.
- *Автор, ответственный за переписку/Corresponding author