

УДК 624.012.45; 624.073

[https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1\(632\)-29-41](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1(632)-29-41)**Н.Ю. ЦЫБИН**

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), Ярославское шоссе, д. 26, г. Москва, 129337, Российская Федерация

# МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОИЗВОЛЬНОГО РАСЧЕТНОГО КОНТУРА ПРОДАВЛИВАНИЯ

## Аннотация

**Введение.** Сосредоточенное действие нагрузок является одной из основных причин хрупкого разрушения железобетонных конструкций. Расчет на продавливание железобетонных плит в отечественных и зарубежных нормах опирается на геометрические характеристики контура, расположенного вокруг площадки передачи нагрузки. В случае действия сосредоточенной силы, единственной геометрической характеристикой является периметр. Положения расчета на продавливание требуют учета сосредоточенных моментов, следовательно есть необходимость вычисления соответствующих геометрических характеристик. Методика их вычисления в нормативной документации описана в общем виде. Для сложных контуров готовые формулы отсутствуют. Это влечет за собой необходимость разработки универсальной методики расчета геометрических характеристик для произвольных контуров.

**Цель.** Разработка универсальной методики вычисления геометрических характеристик произвольных расчетных контуров продавливания, составленных из отрезков и дуг.

**Материалы и методы.** Предложенная в статье методика основана на общих подходах курса сопротивления материалов. Основным отличием является то, что геометрические характеристики вычисляются для контура. Это приводит к различиям в единицах измерения соответствующих величин для поперечных сечений стержней и контура.

**Результаты.** Получены геометрические характеристики элементарных фигур, таких как отрезок и дуга, на основе которых затем вычислены данные величины для всего расчетного контура. Полученные формулы исключают противоречия в единицах измерения. На основе полученных формул выполнен пример расчета контура, составленного из отрезков и дуг.

**Выводы.** В статье предложен универсальный координатный метод вычисления геометрических характеристик, в том числе центробежного момента инерции, произвольного расчетного контура продавливания, составленного из отрезков и дуг. Данный подход можно реализовать с использованием распространенного программного обеспечения, электронных таблиц и т. д.

**Ключевые слова:** железобетон, перекрытие, продавливание, сосредоточенная нагрузка, сосредоточенный момент, геометрические характеристики, момент инерции, координатный метод, расчетный контур

**Для цитирования:** Цыбин Н.Ю. Методика вычисления геометрических характеристик произвольного расчетного контура продавливания // *Бетон и железобетон*. 2026. № 1 (632). С. 29–41. DOI: [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1\(632\)-29-41](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1(632)-29-41). EDN: JMRDIA.

## Вклад автора

Автор берет на себя ответственность за все аспекты работы над статьей.

## Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 28.11.2025

Поступила после рецензирования 03.02.2026

Принята к публикации 05.02.2026

N.Yu. TSYBIN

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Yaroslavskoye Shosse, 26,  
Moscow, 129337, Russian Federation

# METHOD FOR GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF AN ARBITRARY CALCULATED PUNCHING CONTOUR CALCULATION

## Abstract

*Introduction.* The concentrated action of loads is one of the main causes of brittle failure in reinforced concrete structures. The punching calculation of reinforced concrete slabs in domestic and international codes is based on the geometric characteristics of a contour located around the load application area. In the case of a concentrated force, the only geometric characteristic considered is the perimeter. Punching calculation provisions also require accounting of concentrated moments, which consequently necessitates the calculation of the corresponding geometric characteristics. The methodology for their calculation is described in general terms in regulatory documents. Ready-made formulas are not available for complex contours. This creates the need to develop a universal method for calculating the geometric characteristics of arbitrary contours.

*Aim.* To develop a universal method for calculating the geometric characteristics of arbitrary punching contour composed of straight-line segments and arcs.

*Materials and methods.* The method proposed in the article is based on general approaches from the course of strength of materials. The main distinction is that the geometric characteristics are calculated for a contour. This leads to differences in the units of measurement of the corresponding quantities for bar cross-sections and for a contour.

*Results.* The geometric characteristics of elementary figures, such as a straight-line segment and an arc, are derived. These expressions are then used to determine the corresponding characteristics for the entire contour. The obtained formulas eliminate inconsistencies in units of measurement. An example calculation of a contour composed of straight-line segments and arcs is provided based on the derived formulas.

*Conclusions.* A universal coordinate-based method for calculating the geometric characteristics, including the rotational moment of inertia, of an arbitrary punching contour composed of straight-line segments and arcs is proposed. The approach can be implemented using commonly available software tools, spreadsheets, etc.

**Keywords:** reinforced concrete, slab, punching, concentrated load, concentrated moment, geometric characteristics, moment of inertia, coordinate method, contour

**For citation:** Tsybin N.Yu. Method for geometric characteristics of an arbitrary calculated punching contour calculation. *Beton i Zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete], 2026, no. 1 (632), pp. 29–41. (In Russian). DOI: [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1\(632\)-29-41](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-1(632)-29-41). EDN: JMRDIA.

## Author contribution statement

The author takes responsibility for all aspects of the paper.

## Funding

No funding support was obtained for the research.

## Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

Received 28.11.2025

Revised 03.02.2026

Accepted 05.02.2026

**Введение**

Вопрос разрушения плоских безбалочных плит железобетонных перекрытий зданий и сооружений при действии сосредоточенных сил (продавливание) рассматривается в инженерном и научном сообществе давно [1] и активно [2, 3]. Причиной является тот факт, что существенная часть аварийных ситуаций в подобных конструкциях возникает именно в результате продавливания.

В области передачи сосредоточенных усилий на плиту перекрытия в последней возникает сложное напряженно-деформированное состояние (НДС). Его изучение является предметом многочисленных научных исследований [4]. Результаты этих исследований, в силу сложности, редко применяются в инженерной практике. В научных исследованиях рассматриваются конкретные расчетные ситуации [5], которые не могут в полной мере отразить все разнообразие случаев, встречающихся на практике.

В процессе проектирования инженеру-конструктору в пределах одного здания бывает необходимо проверять десятки, а иногда и сотни участков продавливания, некоторые из которых могут существенно отличаться от примеров, приведенных в нормативных документах. Несмотря на существенное развитие численных методов, позволяющих моделировать подобные задачи в пространственной физически нелинейной постановке [6, 7], сложность процесса моделирования и время, затрачиваемое на расчет, не позволяют на данном этапе научно-технического прогресса внедрять такой подход повсеместно. Ввиду этого в большинстве нормативных документов, отражающих вопросы расчета на продавливание, исследование сложного НДС в зоне передачи нагрузки заменяют проверкой на прочность некоторого контура [8, 9], расположенного вокруг площадки передачи нагрузки. Данный контур далее будем называть расчетным.

Сама форма расчетного контура, а также то, каким образом в критериях прочности учитываются его характеристики, является обобщением научных, численных, экспериментальных исследований [10] и отличается в различных нормативных документах. Именно уточнению формы и габаритов расчетного

контура посвящено существенное число научных работ [11, 12]. Отметим, что расчетный контур может быть замкнутым [13] или незамкнутым, полным (вокруг всей площадки передачи нагрузки) или усеченным, обрезанным отверстиями [7], состоять только из прямых отрезков или содержать дополнительно дуги (закругления). На рис. 1 приведены некоторые варианты расчетных контуров.

Выбор формы контура при продавливании оставим на усмотрение требований соответствующих нормативных документов, отражающих вопрос расчета на продавливание. Отметим, что, независимо от формы расчетного контура, элементы, из которых он составлен, представляют собой отрезки и дуги.

Необходимость учета в расчетах на продавливание сосредоточенных моментов приводит к тому, что в соответствующих формулах появляются слагаемые [12], аналогичные моментам инерции и сопротивления поперечных сечений стержней. Рассмотрим это на конкретных формулах наиболее распространенных нормативных документов. Для простоты рассмотрим случаи расчета без учета поперечного армирования.

Согласно Eurocode 2 [8], максимальное значение сдвигающих сил,  $V_{Ed}$  в расчетном контуре, распределенных по длине и направленных по нормали к плите, которое затем должно сравниваться с предельно допустимым, в случае внецентренного приложения нагрузки (при наличии сосредоточенных моментов) определяется формулой:

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_i d}, \quad d = (d_y + d_z)/2, \quad \beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \times \frac{u_1}{W_1}, \quad (1)$$

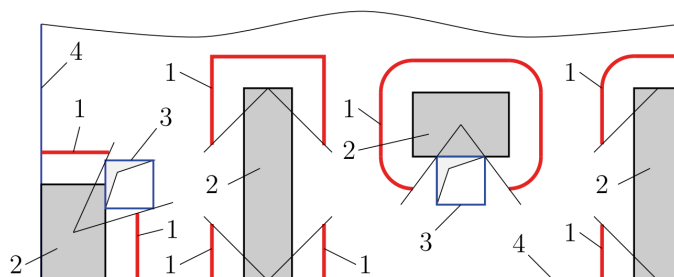
где  $V_{Ed}$ ,  $M_{Ed}$  – сосредоточенная продавливающая сила и момент соответственно;

$d_y$ ,  $d_z$ , – эффективная глубина (рабочая высота сечения согласно СП 63.13330.2018 [9]) в направлении двух взаимно перпендикулярных осей плиты;

$u_i$  – периметр контрольного (расчетного) контура;

$W_1$  – фактически представляет собой пластический момент сопротивления, который может быть получен из статических моментов полусечений;

$k$  – коэффициент, зависящий от соотношения между размерами колонны.



**Рис. 1.** Некоторые варианты расчетных контуров: 1 – элементы расчетных контуров; 2 – площадка передачи нагрузки (колонна, пилон, стена); 3 – отверстие в плите перекрытия; 4 – грань плиты перекрытия  
**Fig. 1.** Some variants of calculation contours: 1 – elements of the design contours; 2 – load transfer area (column, pylon, wall); 3 – hole in the floor slab; 4 – face of the floor slab

Для определения величины  $W_1$  в данном нормативном документе приведена общая формула для  $i$ -го участка контура, а именно:

$$W_i = \int_0^{u_i} |e| dl, \quad (2)$$

в которой  $dl$  – дифференциал длины расчетного контура;

$e$  – расстояние до осей, относительно которых действует момент.

Для некоторых вариантов расчетных контуров значения  $W_1$  приведены непосредственно в Eurocode 2 [8], однако приведенный список полностью не исчерпывает многообразие встречающихся на практике случаев.

Согласно СП 63.13330.2018 [9], геометрические характеристики расчетного контура вычисляются как сумму соответствующих характеристик отдельных участков, с условной единичной шириной  $t = 1$ . Это может привести к неправильным результатам, особенно если расчетчик (инженер) не в полной мере осознает понятие «единичная ширина». Причиной является то, что в курсе сопротивления материалов изучаются геометрические характеристики именно площади. Таким образом, понятие *геометрических* характеристик контура остается невостребованным и рассматривается лишь в курсе физики, в контексте инерции линейной *массы*, а также в курсе математики, без привязки к реальным физическим величинам и объектам.

Рассмотрим данное утверждение на конкретном примере абстрактного контура, составленного из одного вертикального отрезка длиной  $L = 0,6$  м. Так как в [9] моменты и геометрические характеристики расчетного контура при расчете на продавливание рассматриваются *в направлении оси, а не относительно*, как это принято в курсе сопротивления материалов, будем придерживаться того же правила.

В соответствии с известными формулами моментов инерции для прямоугольного сечения найдем:

$$I_x = \frac{t^3 L}{12} = \frac{1^3 \times 0,6 \text{ м}}{12} = 0,05 \text{ м}^4; \quad I_y = \frac{t L^3}{12} = \frac{1 \times (0,6 \text{ м})^3}{12} = 0,018 \text{ м}^4. \quad (3)$$

Из приведенных результатов может сложиться впечатление, что момент инерции *в направлении* оси  $y$  значительно меньше, чем в направлении оси  $x$ . Однако это противоречит физическому смыслу. Также различаются размерности полученных значений. Ввиду сказанного выше можно сделать вывод, что понятие момента инерции контура, приведенное в [9], требует уточнения.

Сформулируем список требований к разрабатываемой методике.

1. В первую очередь методика должна быть универсальной, т. е. позволять рассчитывать геометрические характеристики произвольных расчетных контуров.

2. Учитывая различные варианты расчетных контуров, предлагаемых нормативными документами, методика должна учитывать возможное наличие прямолинейных и дуговых участков.

3. Методика должна быть легко реализуема в различных программных средах и языках программирования, в первую очередь в электронных таблицах, учитывая широкое использование последних в практике.

4. Методика должна позволять определять по универсальным формулам: периметр; положение центра тяжести; осевые, центробежные и полярный моменты инерции; упругие моменты сопротивления расчетного контура.

Учитывая сформулированные требования к разрабатываемой методике, можно определить ее целевую аудиторию. В первую очередь это инженеры-конструкторы, в чьи повседневные обязанности входит проверка прочности плит перекрытий при продавливании.

### Материалы и методы

#### Геометрические характеристики отрезка

Рассмотрим отрезок  $AB$  в произвольной декартовой прямоугольной системе координат  $x_0 O_0 y_0$  (рис. 2). Середину отрезка обозначим точкой  $O$  и разместим в ней систему координат  $xOy$ , причем  $x \parallel x_0$  и  $y \parallel y_0$ . Середина отрезка  $O$  совпадает с его центром тяжести, следовательно оси  $x$  и  $y$  являются центральными.

Совместим с отрезком естественную координатную ось  $O_1 l$  ( $l \in [0, L]$ ). Положение точки  $O_1$  совпадает с точкой  $A$  начала отрезка. Тогда координата произвольной точки  $M$  на отрезке в системе  $x_0 O_0 y_0$  будет связана с координатой  $l$  (в соответствии с рис. 2) соотношениями:

$$x_0 = x_{a_0} + l \cos(\alpha); \quad y_0 = y_{a_0} + l \sin(\alpha). \quad (4)$$

Аналогично в системе координат  $xOy$  получим:

$$x = \left(l - \frac{L}{2}\right) \cos(\alpha); \quad y = \left(l - \frac{L}{2}\right) \sin(\alpha). \quad (5)$$

В данных выражениях  $L$  – полная длина отрезка:

$$L = \int_0^L dl = \sqrt{(x_{b_0} - x_{a_0})^2 + (y_{b_0} - y_{a_0})^2} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \quad (6)$$

Координаты центра тяжести отрезка в системе координат  $x_0 O_0 y_0$  обозначим как  $x_{c_0}$  и  $y_{c_0}$ . В соответствии с рис. 2 связь между координатами  $x_0$  и  $y_0$  произвольной точки  $M$  и координатами  $x$  и  $y$  имеет вид:

$$x_0 = x + x_{c_0}; \quad y_0 = y + y_{c_0}. \quad (7)$$

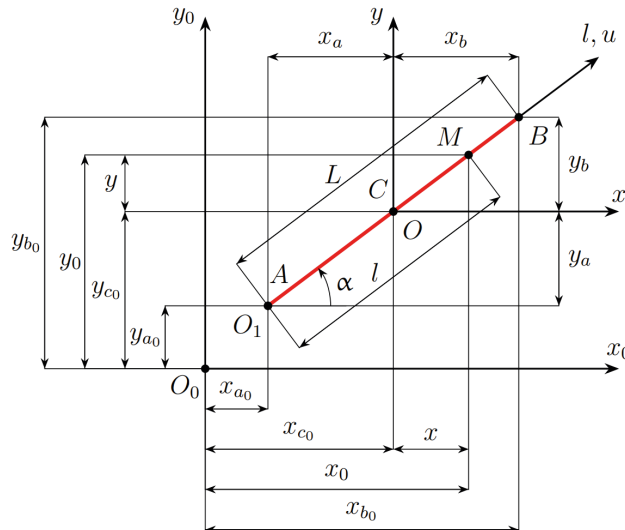


Рис. 2. Произвольный отрезок  
Fig. 2. Arbitrary segment

Координаты центра тяжести отрезка в системе материалов.  $x_0O_0y_0$  могут быть вычислены по формулам:

$$x_{c_0} = x_{a_0} + \frac{L}{2} \cos(\alpha); \quad y_{c_0} = y_{a_0} + \frac{L}{2} \sin(\alpha). \quad (8)$$

Косинус и синус угла  $\alpha$  можно вычислить из координат начала (A) и конца (B) отрезка в системе  $x_0O_0y_0$  или  $xOy$  по формулам:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_{b_0} - x_{a_0}}{L} = \frac{x_b - x_a}{L}; \quad \sin(\alpha) = \frac{y_{b_0} - y_{a_0}}{L} = \frac{y_b - y_a}{L}. \quad (9)$$

Вычислим осевые ( $I_x, I_y$ ) и центробежный ( $I_{xy}$ ) моменты инерции отрезка в направлении (а не относительно) центральных осей  $xOy$  с учетом выражений (5):

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_0^L x^2 dl = \frac{L^3}{12} \cos^2(\alpha); & I_y &= \int_0^L y^2 dl = \frac{L^3}{12} \sin^2(\alpha); \\ I_{xy} &= \int_0^L xy dl = \frac{L^3}{12} \sin(\alpha) \cos(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Величины  $I_x, I_y, I_{xy}$  в дальнейшем будем называть центральными (собственными) моментами инерции отрезка. Из данных формул следует, что осевые моменты инерции отрезка, в отличие от осевых моментов поперечных сечений стержней, могут принимать также нулевое значение, в зависимости от величины угла  $\alpha$ . Размерностью осевых и центробежного моментов инерции отрезка является [длина<sup>3</sup>], в отличие от аналогичных величин для площади, где размерностью является [длина<sup>4</sup>]. Осевые моменты положительны или равны нулю. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Вычислим осевые моменты инерции в направлении главных центральных осей в соответствии с формулами, знакомыми из курса сопротивления

$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (11)$$

В результате найдем:

$$I_u = \frac{L^3}{12}; \quad I_v = 0. \quad (12)$$

Направление главной оси  $u$  (совпадающее с осью  $l$ ) показано на рис. 2. Начало оси расположено в точке  $O$  (в центре отрезка).

Складывая между собой первые два равенства (10) и равенства (12), получим условие инвариантности полярного момента инерции:

$$I_p = I_x + I_y = I_u + I_v = \frac{L^3}{12}. \quad (13)$$

Подстановка (12) в (10) приведет к более простым формулам:

$$I_x = I_u \cos^2(\alpha); \quad I_y = I_u \sin^2(\alpha); \quad I_{xy} = I_u \sin(\alpha) \cos(\alpha). \quad (14)$$

Положение центральных осей отрезка в общем случае не совпадает с положением центральных осей всего контура. В связи с этим необходимо знать, каким образом вычисляются характеристики отрезка относительно произвольных осей  $x_0, y_0$ . Вычислим осевые ( $I_{x_0}, I_{y_0}$ ) и центробежный ( $I_{x_0y_0}$ ) моменты инерции отрезка. Для этого воспользуемся формулами:

$$I_{x_0} = \int_0^L x_0^2 dl; \quad I_{y_0} = \int_0^L y_0^2 dl; \quad I_{x_0y_0} = \int_0^L x_0y_0 dl. \quad (15)$$

Учитывая формулы (6), (7) и (10), получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_0} &= \int_0^L (x + x_{c_0})^2 dl = I_x + 2S_x x_{c_0} + Lx_{c_0}^2; \\ I_{y_0} &= \int_0^L (y + y_{c_0})^2 dl = I_y + 2S_y y_{c_0} + Ly_{c_0}^2; \\ I_{x_0 y_0} &= \int_0^L (x + x_{c_0})(y + y_{c_0}) dl = I_{xy} + 2S_x x_{c_0} + 2S_y y_{c_0} + Lx_{c_0} y_{c_0}. \end{aligned} \right\} (16)$$

Здесь, как и в случае статических моментов, вычисление выполнено *не относительно, а в направлении* соответствующих осей.

Входящие в формулы (16) величины  $S_x$  и  $S_y$  представляют собой статические моменты отрезка *в направлении* осей  $x$  и  $y$ , вычисляемые по формулам:

$$S_x = \int_0^L x dl = 0; \quad S_y = \int_0^L y dl = 0. \quad (17)$$

Данные величины равны нулю, так как оси  $x$  и  $y$  являются центральными. Убедиться в этом можно, подставив (5) в (17). В направлении произвольных осей  $x_0$  и  $y_0$  формулы (17), с учетом (7), примут вид:

$$\left. \begin{aligned} S_{x_0} &= \int_0^L x_0 dl = \int_0^L (x + x_{c_0}) dl = Lx_{c_0}; \\ S_{y_0} &= \int_0^L y_0 dl = \int_0^L (y + y_{c_0}) dl = Ly_{c_0}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Формулы (18) также могут быть использованы для определения центра тяжести:

$$x_{c_0} = \frac{S_{x_0}}{L}; \quad y_{c_0} = \frac{S_{y_0}}{L}. \quad (19)$$

Окончательные формулы (16) для вычисления моментов инерции отрезка *в направлении* произвольных осей  $x_0$  и  $y_0$ , с учетом (17), примут вид:

$$I_{x_0} = I_x + Lx_{c_0}^2; \quad I_{y_0} = I_y + Ly_{c_0}^2; \quad I_{x_0 y_0} = I_{xy} + Lx_{c_0} y_{c_0}. \quad (20)$$

Таким образом, осевые и центробежный моменты инерции отрезка в направлении произвольных осей  $x_0 O_0 y_0$  представляют собой сумму осевого и центробежного моментов инерции в направлении собственных центральных осей  $xOy$ , вычисляемых по формулам (14), и слагаемого, отвечающего за эксцентриситет центра тяжести, аналогично формулам для геометрических характеристик поперечных сечений.

Используя формулы (20), можно выполнить обратное действие:

$$I_x = I_{x_0} - Lx_{c_0}^2; \quad I_y = I_{y_0} - Ly_{c_0}^2; \quad I_{xy} = I_{x_0 y_0} - Lx_{c_0} y_{c_0}. \quad (21)$$

Данные формулы (21) интерпретируются следующим образом: если известны осевые ( $I_{x_0}, I_{y_0}$ ) и центробежный ( $I_{x_0 y_0}$ ) моменты инерции в произвольной системе координат  $x_0 O_0 y_0$ , а также положение центра тяжести в данной системе координат ( $x_{c_0}, y_{c_0}$ ), то, используя формулы (21), можно вычислить осевые ( $I_x, I_y$ ) и центробежный ( $I_{xy}$ ) моменты инерции в направлении центральных осей  $xOy$ .

#### Геометрические характеристики дуги

Во введении было показано, что, согласно требованиям некоторых нормативных документов, расчетный контур может содержать дуги. Ввиду этого получим также геометрические характеристики произвольной дуги  $AB$ , приведенной на рис. 3.

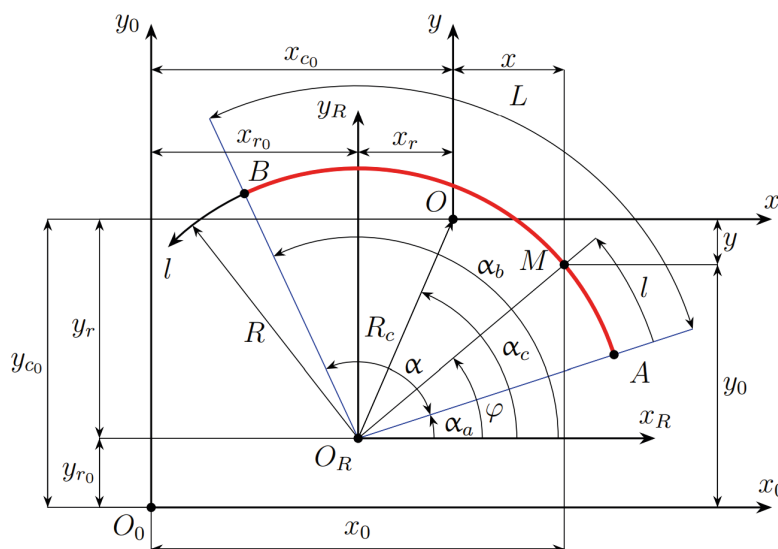


Рис. 3. Произвольная дуга  
Fig. 3. Arbitrary arc

На рис. 3 приведена произвольная дуга, имеющая радиус  $R$ . Центр опорной окружности  $O_R$  расположен относительно произвольной системы координат  $x_0O_0y_0$  в точках  $x_{r_0}, y_{r_0}$ . В точке  $O_R$  расположена вспомогательная система координат  $x_R O_R y_R$ . Введем в данной системе угловую координату  $\varphi$ , отсчитываемую от оси  $x_R$ . Тогда координаты произвольной точки  $M$  дуги в системе координат  $x_0O_0y_0$  связаны с углом  $\varphi$  следующими соотношениями:

$$x_0 = x_{r_0} + R\cos(\varphi); \quad y_0 = y_{r_0} + R\sin(\varphi). \quad (22)$$

Длина дуги вычисляется по известной формуле:

$$L = R\alpha, \quad (23)$$

где  $\alpha$  – центральный угол дуги, измеряемый в радианах:

$$\alpha = \alpha_b - \alpha_a. \quad (24)$$

В соответствии с рис. 3 в данной формуле  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  – значения угла  $\varphi$ , которые соответствуют началу (точка  $A$ ) и концу дуги (точка  $B$ ).

Естественная координата  $l$  отсчитывается вдоль дуги от точки  $A$ . Дифференциал дуги  $dl$  линейно связан с дифференциалом угла  $\varphi$  и радиусом  $R$  соотношением:

$$dl = R d\varphi. \quad (25)$$

Тогда статические моменты в направлении осей  $x_0$  и  $y_0$  будут определяться формулами:

$$S_{x_0} = \int_0^L x_0 dl = \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} x_0 R d\varphi; \quad S_{y_0} = \int_0^L y_0 dl = \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} y_0 R d\varphi. \quad (26)$$

После подстановки выражений (22) в (26) найдем:

$$\left. \begin{aligned} S_{x_0} &= R^2(\sin(\alpha_b) - \sin(\alpha_a)) + Lx_{r_0} = 2R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(\alpha_c) + Lx_{r_0}; \\ S_{y_0} &= R^2(\cos(\alpha_a) - \cos(\alpha_b)) + Ly_{r_0} = 2R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\alpha_c) + Ly_{r_0}. \end{aligned} \right\} (27)$$

Формулы (27) могут быть использованы для нахождения центра тяжести дуги в системе координат  $x_0O_0y_0$  по аналогии с формулами (19). В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} x_{c_0} &= \frac{S_{x_0}}{L} = R_c \cos(\alpha_c) + x_{r_0} = x_r + x_{r_0}; \\ y_{c_0} &= \frac{S_{y_0}}{L} = R_c \sin(\alpha_c) + y_{r_0} = y_r + y_{r_0}; \\ R_c &= \frac{2R^2}{L} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad \alpha_c = \frac{\alpha_b + \alpha_a}{2} = \alpha_a + \frac{\alpha}{2}; \\ x_r &= R_c \cos(\alpha_c); \quad y_r = R_c \sin(\alpha_c). \end{aligned} \right\} (28)$$

где  $x_r$  и  $y_r$  – координаты центра тяжести дуги в системе координат  $x_R O_R y_R$ ;

$R_c$  – радиус окружности, проходящей через центр тяжести дуги с центром в точке  $O_R$ ;

$\alpha_c$  – средний угол дуги.

Собственные центральные оси  $xOy$  дуги представлены на рис. 3. Положение произвольной точки  $M$  дуги в системе координат  $xOy$  будет вычисляться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - x_{c_0} = R\cos(\varphi) - R_c \cos(\alpha_c); \\ y &= y_0 - y_{c_0} = R\sin(\varphi) - R_c \sin(\alpha_c). \end{aligned} \right\} (29)$$

Вычислим моменты инерции в направлении собственных центральных осей с учетом формул (29):

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} x^2 R d\varphi = \frac{LR^2}{2} + \frac{R^3}{2} \sin(\alpha) \cos(2\alpha_c) - Lx_r^2; \\ I_y &= \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} y^2 R d\varphi = \frac{LR^2}{2} - \frac{R^3}{2} \sin(\alpha) \cos(2\alpha_c) - Ly_r^2; \\ I_{xy} &= \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} xy R d\varphi = \frac{LR^2}{2} \left( \frac{R}{L} \sin(\alpha) - \frac{R_c^2}{R} \right) \sin(2\alpha_c). \end{aligned} \right\} (30)$$

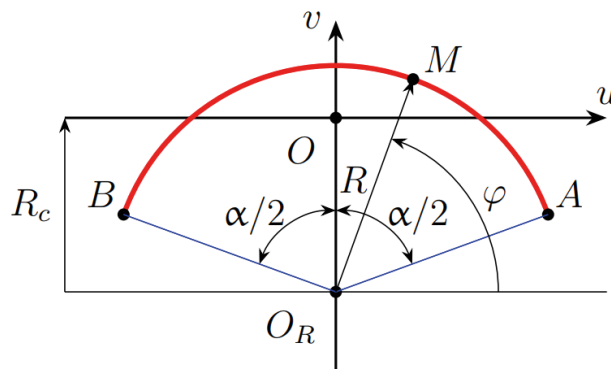


Рис. 4. Произвольная дуга относительно главных центральных осей  
Fig. 4. An arbitrary arc relative to the main central axe

Выражения (30) аналогично полученным ранее для отрезка (14) удобнее записать через главные моменты инерции. Направление главной оси  $Ov$  дуги совпадает с направлением линии, проведенной из центра опорной окружности к центру тяжести. Формулы для вычисления центра тяжести дуги относительно опорной окружности были получены ранее.

Положение произвольной точки  $M$  в системе главных центральных осей  $uOv$  в соответствии с рис. 4 вычисляется по формулам:

$$u = R \cos(\varphi); \quad v = R \sin(\varphi) - R_c. \quad (31)$$

Формулы для вычисления моментов инерции дуги в главной системе координат  $uOv$  записаны ниже:

$$I_u = \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} u^2 R d\varphi; \quad I_v = \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} v^2 R d\varphi; \quad I_{uv} = \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} uv R d\varphi. \quad (32)$$

С учетом (31) из (32) получим:

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{LR^2}{2} \left( 1 - \frac{R}{L} \sin(\alpha) \right); \\ I_v &= \frac{LR^2}{2} \left( 1 + \frac{R}{L} \sin(\alpha) \right) - LR_c^2; \quad I_{uv} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогичные результаты можно получить, если положить в формулы (30) средний угол дуги  $\alpha_c = \pi/2$ .

Складывая между собой первые две формулы (30) и (33), получим:

$$I_p = I_x + I_y = I_u + I_v = L(R^2 - R_c^2). \quad (34)$$

Таким образом, инвариантность полярного момента инерции  $I_p$  относительно поворота центральной системы координат выполняется.

Используя равенства (33), перепишем формулы (30) в более удобном виде через главные моменты инерции:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_u \sin^2(\alpha_c) + I_v \cos^2(\alpha_c); \\ I_y &= I_u \cos^2(\alpha_c) + I_v \sin^2(\alpha_c); \\ I_{xy} &= \frac{I_v - I_u}{2} \sin(2\alpha_c). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Теперь, зная собственные моменты инерции дуги (формулы (30) или (35)) в направлении центральных осей  $xOy$ , можно найти данные величины в направлении произвольных осей  $x_0Oy_0$  по формулам (20). Положение центра тяжести  $x_{c_0}$  и  $y_{c_0}$  при этом необходимо вычислять по формулам (28).

#### Геометрические характеристики контура

При определении геометрических характеристик контура, составленного из нескольких элементов (отрезков или дуг), можно использовать аддитивное свойство интегралов, заключающееся в том, что интеграл суммы равен сумме интегралов. Таким образом, величина какой-либо характеристики контура равна сумме

соответствующих характеристик каждого из элементов, составляющих данный контур.

Суммарная длина контура определяется формулой:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i, \quad (36)$$

где  $i$  – номер элемента (отрезка или дуги) в контуре;

$N$  – число элементов в контуре;

$L_i$  – длина элемента  $i$ , определяемая согласно (6) для отрезков или (23) для дуги.

Для статических моментов контура, составленного из нескольких элементов, получим:

$$S_{x_0} = \sum_{i=1}^N S_{i,x_0} = \sum_{i=1}^N L_i x_{i,c_0}; \quad S_{y_0} = \sum_{i=1}^N S_{i,y_0} = \sum_{i=1}^N L_i y_{i,c_0}. \quad (37)$$

где  $S_{i,x_0}$  и  $S_{i,y_0}$  – статические моменты элемента  $i$  в направлении осей  $x_0$  и  $y_0$ ;

$x_{i,c_0}$  и  $y_{i,c_0}$  – координаты центра элемента  $i$  в направлении осей  $x_0$  и  $y_0$ , определяемые согласно (8) для отрезков или (28) для дуг.

Положение центра тяжести всего контура может быть определено по формулам (19). С учетом выражений (36) и (37) получим:

$$x_{c_0} = \frac{S_{x_0}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^N L_i x_{i,c_0}}{\sum_{i=1}^N L_i}; \quad y_{c_0} = \frac{S_{y_0}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^N L_i y_{i,c_0}}{\sum_{i=1}^N L_i}. \quad (38)$$

Для осевых и центробежного моментов инерции с учетом формул (20) в направлении произвольных осей  $x_0Oy_0$  получим:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_0} &= \sum_{i=1}^N I_{i,x_0} = \sum_{i=1}^N (I_{i,x_i} + L_i x_{i,c_0}^2); \\ I_{y_0} &= \sum_{i=1}^N I_{i,y_0} = \sum_{i=1}^N (I_{i,y_i} + L_i y_{i,c_0}^2); \\ I_{x_0 y_0} &= \sum_{i=1}^N I_{i,x_0 y_0} = \sum_{i=1}^N (I_{i,x_i y_i} + L_i x_{i,c_0} y_{i,c_0}), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где  $I_{i,x_i}$ ,  $I_{i,y_i}$  и  $I_{i,x_i y_i}$  – осевые и центробежный моменты инерции элемента  $i$  в направлении собственных центральных осей  $x_i$  и  $y_i$  согласно формулам (14) для отрезков. Для дуг данные величины вычисляются по формулам (35).

Для вычисления осевых и центробежного моментов инерции в направлении центральных осей всего контура можно использовать два основных подхода.

1. Пересчитать геометрические характеристики каждого из элементов относительно центральных осей контура, т. е. выполнить расчет по формулам:

$$I_x = \sum_{i=1}^N (I_{i,x_i} + L_i(x_{i,c_0} - x_{c_0})^2); \quad I_y = \sum_{i=1}^N (I_{i,y_i} + L_i(y_{i,c_0} - y_{c_0})^2);$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^N (I_{i,x_i y_i} + L_i(x_{i,c_0} - x_{c_0})(y_{i,c_0} - y_{c_0})). \quad (40)$$

2. Используя значения осевых и центробежного моментов относительно произвольных осей  $x_0 O_0 x_0$ , выполнить расчет по формулам (21).

Результаты вычисления по формулам (40) и (21) будут одинаковыми.

После нахождения осевых и центробежных моментов всего контура по формулам (40) или (21) осевые моменты инерции в направлении главных осей можно вычислить по формулам (11). Далее можно вычислить углы поворота главных осей по формулам:

$$\alpha_u = \arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_x - I_v}\right); \quad \alpha_v = \arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_x - I_u}\right). \quad (41)$$

Углы  $\alpha_u$  и  $\alpha_v$  отсчитываются от оси  $x$  против часовой стрелки (в сторону оси  $y$ ). В формулах (41) также имеется отличие от классических формул, полученных в курсе сопротивления материалов:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_1}\right); \quad \alpha_2 = \arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_2}\right). \quad (42)$$

Причиной данного отличия является тот факт, что в данной статье, в соответствии с [9], геометрические характеристики контура вычислялись не относительно, а в направлении осей. Формулы совпадут при замене в правых частях, а именно  $2 \leftrightarrow u, 1 \leftrightarrow v, x, y \leftrightarrow y, x$ .

По аналогии с курсом сопротивления материалов далее можно ввести следующие геометрические характеристики, называемые моментами сопротивления контура:

$$W_x^+ = \frac{I_x}{x_{\max}}; \quad W_x^- = \frac{I_x}{|x_{\min}|}; \quad W_y^+ = \frac{I_y}{y_{\max}}; \quad W_y^- = \frac{I_y}{|y_{\min}|}. \quad (43)$$

В данных формулах  $x_{\min}, x_{\max}$  – координаты точек, наиболее удаленных вдоль оси  $x$  от центра тяжести расчетного контура (левая и правая точка);  $y_{\min}, y_{\max}$  – точки, наиболее удаленные от центра тяжести вдоль оси  $y$  (верхняя и нижняя точки расчетного контура соответственно). Моменты сопротивления всегда положительны и измеряются в единицах [длина<sup>2</sup>].

### Результаты

#### Пример вычисления геометрических характеристик контура по предложенной методике

Рассмотрим конкретный пример расчетного контура, приведенный на рис. 5.

Представленный на рис. 5 контур состоит из пяти элементов: четырех отрезков и одной дуги. Номера подписаны рядом с элементами. Вспомогательная сетка построена с шагом  $1 \times 1$  дм в каждом направлении. Отметим здесь, что положение вспомогательных осей  $x_0$  и  $y_0$ , а также порядок точек в каждом из отрезков контура (начало – конец = конец – начало) могут быть произвольными. Для дуг значения начального и конечного углов должны быть в порядке возрастания. Данное правило можно нарушать, если применять в формуле вычисления длины окружности (23) абсолютное значение центрального угла  $\alpha = |\alpha_b - \alpha_a|$ .

Исходные данные и некоторые вспомогательные расчеты для всех элементов контура представлены с округлением в табл. 1.

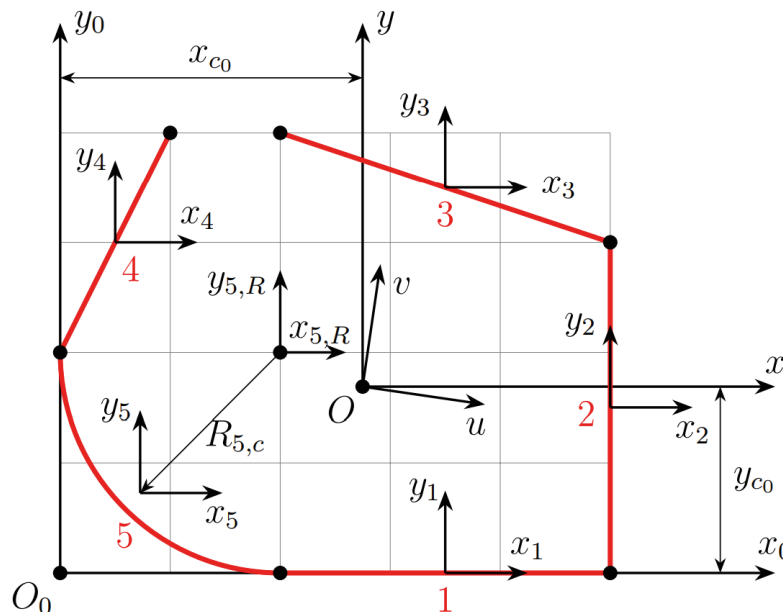


Рис. 5. Эскиз расчетного контура для примера  
Fig. 5. Sketch of the calculation contour for an example

Таблица 1

Расчетные данные для примера

Table 1

Calculation data for the example

		1	2	3	4	5	Номер <i>i</i> элемента в контуре
1	$x_{i,a_0}, x_{i,r_0}$	2,0	5,0	5,0	0,0	2,0	Координаты начала отрезка или центр опорной окружности дуги
2	$y_{i,a_0}, y_{i,r_0}$	0,0	0,0	3,0	2,0	2,0	
3	$x_{i,b_0}, \alpha_{i,a}$	5,0	5,0	2,0	1,0	180,0	Координаты конца отрезка или углы начала и завершения дуги
4	$y_{i,b_0}, \alpha_{i,b}$	0,0	3,0	4,0	4,0	270,0	
5	$R_i$	–	–	–	–	2,0	Радиус опорной окружности дуги
6	$L_i$	3,0	3,0	3,16	2,24	3,14	Длина элемента. Формула (6) для отрезков и (23) для дуг
7	$x_{i,c_0}$	3,5	5,0	3,5	0,5	0,73	Координаты центра тяжести в направлении вспомогательных осей $x_0$ и $y_0$ . Формулы (8) для отрезков и (28) для дуг
8	$y_{i,c_0}$	0,0	1,5	3,5	3,0	0,73	
9	$S_{i,x_0}$	10,5	15,0	11,07	1,12	2,28	Статические моменты элемента <i>i</i> в направлении вспомогательных осей $x_0$ и $y_0$ по формулам (18)
10	$S_{i,y_0}$	0,0	4,5	11,07	6,71	2,28	
11	$I_{i,u}$	2,25	2,25	2,64	0,93	2,28	Моменты инерции элемента в направлении собственных главных центральных осей $u_i$ и $v_i$ . Формулы (12) для отрезков и (33) для дуг
12	$I_{i,v}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	
13	$I_{i,x}$	2,25	0,0	2,37	0,19	1,19	Осевые и центробежный моменты инерции элемента <i>i</i> в направлении собственных осей $x_i$ и $y_i$ . Формулы (14) для отрезков и (35) для дуг
14	$I_{i,y}$	0,0	2,25	0,26	0,75	1,19	
15	$I_{i,xy}$	0,0	0,0	-0,79	0,37	-1,09	
16	$I_{i,x_0}$	39,0	75,0	41,1	0,75	2,85	Осевые и центробежный моменты инерции элемента <i>i</i> в направлении вспомогательных осей $x_0$ и $y_0$ , вычисляемые согласно формулам (20)
17	$I_{i,y_0}$	0,0	9,0	39,0	20,87	2,85	
18	$I_{i,x_0,y_0}$	0,0	22,5	37,94	3,73	0,57	

Подобное табличное представление позволяет легко автоматизировать вычисление геометрических характеристик всего контура, без ограничения на число элементов, составляющих его, во многих программных комплексах, (например, в среде Excel, Smath Studio или Mathcad). Обратим внимание, что вводимыми (исходными) данными в табл. 1 являются только строки 1–5. Остальные величины вычисляются

на основе исходных данных по формулам, полученным ранее.

Суммарная длина контура, приведенного на рис. 5, определяется по формуле (36) с учетом данных 6-й строки табл. 1.

$$L = \sum_{i=1}^5 L_i = 3,0 + 3,0 + 3,16 + 2,24 + 3,14 = 14,54 \text{ дм.} \quad (44)$$

Вычислим суммарные статические моменты контура в направлении вспомогательных осей  $x_0$  и  $y_0$ . Для этого воспользуемся формулами (37) и данными из 9 и 10 строк табл. 1.

$$S_{x_0} = \sum_{i=1}^5 S_{i,x_0} = 10,5 + 15,0 + 11,07 + 1,12 + 2,28 = 39,97 \text{ дм}^2; \tag{45}$$

$$S_{y_0} = \sum_{i=1}^5 S_{i,y_0} = 0,0 + 4,5 + 11,07 + 6,71 + 2,28 = 24,56 \text{ дм}^2.$$

Подставляя (44) и (45) в формулы (38), определим положение центра тяжести всего контура:

$$x_{c_0} = \frac{S_{x_0}}{L} = \frac{39,97}{14,54} = 2,749 \text{ дм}; \quad y_{c_0} = \frac{S_{y_0}}{L} = \frac{24,56}{14,54} = 1,689 \text{ дм.} \tag{46}$$

Центральные оси  $x$  и  $y$ , с учетом полученных в (46) значений, приведены на рис. 5.

В расчетах нас в первую очередь интересуют геометрические характеристики в направлении центральных осей. Для вычисления осевых и центробежного моментов инерции всего контура в направлении центральных осей, в соответствии со вторым способом, представленным ранее, будем использовать формулы (21).

Центробежные и осевые моменты инерции контура в направлении вспомогательных осей  $x_0$  и  $y_0$ , согласно (39) и данным строк 16–18 табл. 1, составят:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_0} &= \sum_{i=1}^5 I_{i,x_0} = 39,0 + 75,5 + 41,1 + 0,75 + 2,85 = 158,7 \text{ дм}^3; \\ I_{y_0} &= \sum_{i=1}^5 I_{i,y_0} = 0,0 + 9,0 + 39,0 + 20,87 + 2,85 = 71,72 \text{ дм}^3; \\ I_{x_0y_0} &= \sum_{i=1}^5 I_{i,x_0y_0} = 0,0 + 22,5 + 37,94 + 3,73 + 0,57 = 64,74 \text{ дм}^3. \end{aligned} \right\} \tag{47}$$

Подставляя (44), (46) и (47) в формулы (21), найдем осевые и центробежный моменты инерции в направлении центральных осей  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{x_0} - Lx_{c_0}^2 = 158,7 - 14,54 \times 2,749^2 = 48,83 \text{ дм}^3; \\ I_y &= I_{y_0} - Ly_{c_0}^2 = 71,72 - 14,54 \times 1,689^2 = 30,24 \text{ дм}^3; \\ I_{xy} &= I_{x_0y_0} - Lx_{c_0}y_{c_0} = 64,74 - 14,54 \times 2,749 \times 1,689 = -2,77 \text{ дм}^3. \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

По формулам (11) вычислим главные моменты инерции с учетом значений (48):

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{48,83 + 30,24}{2} + \sqrt{\left(\frac{48,83 - 30,24}{2}\right)^2 + (-2,77)^2} = 49,23; \\ I_v &= \frac{48,83 + 30,24}{2} - \sqrt{\left(\frac{48,83 - 30,24}{2}\right)^2 + (-2,77)^2} = 29,83. \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

По результатам вычисления главных моментов инерции (49) найдем углы поворота главных осей по формулам (41):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_u &= \arctan\left(\frac{-2,77}{48,83 - 29,83}\right) = -8,3^\circ; \\ \alpha_v &= \arctan\left(\frac{-2,77}{48,83 - 49,23}\right) = 81,7^\circ. \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

Главные центральные оси  $u$  и  $v$  представлены на рис. 5.

### Выводы

В представленной статье на основе известных представлений о геометрических характеристиках поперечных сечений стержней, методом непосредственного интегрирования получены формулы, позволяющие рассчитывать аналогичные характеристики для линий и дуг как основных элементов различных вариантов расчетных контуров при продавливании. Предложенный подход позволил исключить неоднозначность в трактовке размерностей моментов инерции и моментов сопротивления. На основе аддитивных свойств интеграла полученные формулы обобщены на расчет произвольного контура, составленного из данных элементов.

С использованием предложенной координатной методики выполнен пример расчета несимметричного контура. Расчет может быть реализован в электронных таблицах. На основе предложенной методики планируется разработка алгоритма и программного модуля для автоматизации расчетов.

В статье показано, что у несимметричных контуров, помимо моментов инерции в направлении центральных осей, также возникает центробежный момент инерции. Согласно курсу сопротивления материалов, в подобных случаях в поперечном сечении стержня возникают дополнительные напряжения. Однако в нормативных документах отсутствуют рекомендации по их учету. В связи с этим критерии прочности при продавливании контуров при наличии сосредоточенных моментов (как внешних, так и вызванных внецентренным приложением сосредоточенной нагрузки) в направлениях, не совпадающих с направлениями главных осей, требуют уточнения. Полученные результаты могут служить основой для дополнения и уточнения формул в нормативных документах с учетом центробежного момента инерции несимметричных контуров.

### Список литературы

1. Moe J. Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads. Bulletin (Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, Development Department); D-47. Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, 1961. P. 135.
2. Болгов А.Н., Сокуров А.З., Алексеенко Д.В. Продавливание промежуточных узлов сопряжения плита –

- колонна, усиленных клеенной поперечной арматурой // *Бетон и железобетон*. 2014. № 3. С. 10–13. EDN: UAIPH.
3. Трекин Н.Н., Крылов В.В., Андриян К.Р. Совершенствование методики расчета плит на продавливание // *Железобетонные конструкции*. 2024. Т. 6. № 2. С. 35–42. DOI: <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2024.1.35-42>. EDN: DLDWEY.
  4. Крылов В.В., Саркисов Д.Ю., Эргешов Э.Т., Евстафьева Е.Б. Программа экспериментальных исследований несущей способности безбалочных плит на продавливание при динамическом нагружении. Конструкция опытных образцов // *Строительные материалы и изделия*. 2020. Т. 3. № 3. С. 47–53. DOI: <https://doi.org/10.34031/2618-7183-2020-3-3-47-53>.
  5. Филатов В.Б. Силовое сопротивление железобетонных монолитных плит перекрытий при продавливании колоннами прямоугольного сечения // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2012. Т. 14. № 4–5. С. 1322–1324. EDN: QBPFST.
  6. Fatma S., Ezz El-Din M., Ayman H.H.K. Non-linear finite element analysis for the behavior of punching shear in flat slabs with openings. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2020, vol. 11, no. 10, pp. 239–247. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/351941392\\_Non-linear\\_Finite\\_Element\\_Analysis\\_for\\_the\\_Behavior\\_of\\_Punching\\_Shear\\_in\\_Flat\\_Slabs\\_with\\_Openings](https://www.researchgate.net/publication/351941392_Non-linear_Finite_Element_Analysis_for_the_Behavior_of_Punching_Shear_in_Flat_Slabs_with_Openings).
  7. Eid H., Riad K.H., Zaher A.H. Punching shear strength of pre-stressed flat slab in case of near-column openings. *World Applied Sciences Journal*, 2014, vol. 32, no. 5, pp. 780–791. DOI: <https://doi.org/10.5829/idosi.wasj.2014.32.05.14532>.
  8. EN 1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: CEN, 2004.
  9. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Москва, 2018.
  10. Болгов А.Н., Сокуров А.З., Алексеенко Д.В. Продавливание крайних узлов сопряжения плита – колонна, усиленных клеенной поперечной арматурой // *Бетон и железобетон*. 2013. № 3. С. 11–13. EDN: WGDLYD.
  11. Филатов В.Б. Совершенствование нормативной методики расчета на продавливание плоских железобетонных плит // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 5 (40). С. 80–84. EDN: RTGLDX.
  12. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. К построению общей методики расчета железобетонных плит на продавливание с учетом влияния моментов // *Вестник МГСУ*. 2011. № 3–2. С. 86–91. EDN: OWCDIF.
  13. Кремнев В.А., Кузнецов В.С., Талызова Ю.А. Расчет прочности на продавливание плиты безбалочного безкапитального перекрытия // *Вестник МГСУ*. 2014. № 10. С. 34–40. EDN: SWJDWZ.
- ### References
1. Moe J. Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings Under Concentrated Loads. Bulletin (Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, Development Department); D-47. Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, 1961. P. 135.
  2. Bolgov A.N., Sokurov A.Z., Alekseenko D.V. Punching of intermediate plate–column interface nodes reinforced with glued transverse reinforcement. *Beton i Zhelezobeton = Concrete and Reinforced Concrete*, 2014, no. 3, pp. 10–13. (In Russian). EDN: UAIPH.
  3. Trekin N.N., Krylov V.V., Andrian K.R. Improvement of the method of calculating plates for punching. *Zhelezobetonnyye konstruksii = Reinforced concrete structures*, 2024, vol. 6, no. 2, pp. 35–42. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.22227/2949-1622.2024.1.35-42>. EDN: DLDWEY.
  4. Krylov V.V., Sarkisov D. Yu., Ergeshov E.T., Evstafyeva E.B. Program of experimental studies of the load-bearing capacity of girderless plates for pushing under dynamic loading. Design of prototypes. *Construction Materials and Products*, 2020, vol. 3, no. 3, pp. 47–53. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.34031/2618-7183-2020-3-3-47-53>.
  5. Filatov V.B. Power resistance of the ferroconcrete monolithic flat plates of floorings at punching by rectangular columns. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2012, vol. 14, no. 4–5, pp. 1322–1324. (In Russian). EDN: QBPFST.
  6. Fatma S., Ezz El-Din M., Ayman H.H.K. Non-linear finite element analysis for the behavior of punching shear in flat slabs with openings. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2020, vol. 11, no. 10, pp. 239–247. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/351941392\\_Non-linear\\_Finite\\_Element\\_Analysis\\_for\\_the\\_Behavior\\_of\\_Punching\\_Shear\\_in\\_Flat\\_Slabs\\_with\\_Openings](https://www.researchgate.net/publication/351941392_Non-linear_Finite_Element_Analysis_for_the_Behavior_of_Punching_Shear_in_Flat_Slabs_with_Openings).
  7. Eid H., Riad K.H., Zaher A.H. Punching shear strength of pre-stressed flat slab in case of near-column openings. *World Applied Sciences Journal*, 2014, vol. 32, no. 5, pp. 780–791. DOI: <https://doi.org/10.5829/idosi.wasj.2014.32.05.14532>.
  8. EN 1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: CEN, 2004.
  9. SP 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. General provisions. Moscow, 2018. (In Russian).
  10. Bolgov A.N., Sokurov A.Z., Alekseenko D.V. Punching of the extreme plate–column interface nodes reinforced with glued transverse reinforcement. *Beton i Zhelezobeton = Concrete and Reinforced Concrete*, 2013, no. 3, pp. 11–13. (In Russian). EDN: WGDLYD.
  11. Filatov V.B. Perfecting of code design procedure for punching of reinforced concrete flat plates. *Bulletin*

- of Civil Engineers*, 2013, no. 5 (40), pp. 80–84. (In Russian). EDN: RTGLDX.
12. Karpenko N.I., Karpenko S.N. On creation of general method of punching shear calculation of reinforced concrete slabs taking into account influence of moments. *Vestnik MGSU*, 2011, no. 3–2, pp. 86–91. (In Russian). EDN: OWCDIF.
13. Kremnev V.A., Kuznetsov V.S., Talyzova Yu.A. Burst strength analysis for a plate of girderless capitelless floor. *Vestnik MGSU*, 2014, no. 10, pp. 34–40. (In Russian). EDN: SWJDWZ.

**Информация об авторе /  
Information about the author**

**Никита Юрьевич Цыбин**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Соппротивление материалов», НИУ МГСУ, Москва

e-mail: science@nikitatsybin.ru

**Nikita Yu. Tsybin**, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor of the Department of Strength of Materials, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow

e-mail: science@nikitatsybin.ru