

УДК: 69.04
EDN: KUKGAK

[https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3\(634\)-112-123](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3(634)-112-123)

Д.Ю. РУСАНОВ¹, С.А. СЕРБИН¹

¹ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»,
ул. Мира д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Российская Федерация

О ПОИСКЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ В НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЯХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Аннотация

Введение. В статье проведен анализ напряженно-деформированных состояний (НДС) железобетонных элементов при расчете прочности нормальных сечений с применением нелинейной деформационной модели НДМ. Предложен способ описания осевых деформаций и усилий в виде параметров функций, а также введены критерии группирования деформированных состояний по признаку возникающих усилий. Предложен аналитический метод определения предельных усилий в нормальном сечении железобетонного элемента при расчете прочности по НДМ.

Цель. Разработка методики нахождения предельных усилий, при которых не происходит значительной деградации жесткости нормального сечения, в железобетонном элементе при расчете по НДМ, не требующей применения инструментов численного моделирования.

Результаты. Результаты проведенного исследования показали, что запись деформированных состояний сечения в виде параметров уравнения осевых деформаций позволяет описать механизмы НДМ в форме системы нелинейных уравнений, позволяющей выразить прямые аналитические зависимости для нахождения деформаций от усилий. Выявлена группа НДС нормальных сечений, которую можно охарактеризовать, с точки зрения усилий, как близкую к максимальным из возможных (порядка 90...100 % по изгибающему моменту), а с точки зрения жесткости – как границу, после пересечения которой наблюдается резкая деградация жесткостных характеристик сечения. Аналитические зависимости, описывающие выявленную группу, позволили отказаться от применения численных методов для определения предельных усилий по НДМ.

Выводы. Разработана методика определения предельных усилий в нормальном сечении железобетонных элементов при расчете по НДМ, не требующая применения инструментов численного моделирования. Сущность методики заключена в установленных взаимных зависимостях между параметрами уравнения деформированного состояния сечения, при которых в нем наблюдаются усилия, близкие к максимальным из возможных, а также не происходит резкой деградации жесткостных характеристик нормального сечения.

Ключевые слова: железобетонные конструкции, нормальные сечения, расчет, прочность, нелинейная деформационная модель, предельные деформации, аналитические методы

Для цитирования: Русанов Д.Ю., Сербин С.А. О поиске предельных усилий в нормальных сечениях железобетонных элементов при расчете по нелинейной деформационной модели // *Бетон и железобетон*. 2026. № 3 (634). С. 112–123. [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3\(634\)-112-123](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3(634)-112-123). EDN: KUKGAK

Вклад авторов

Авторы внесли равный вклад в постановку задачи, проведение исследований и оценку результатов

Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

Поступила в редакцию 23.02.26

Поступила после рецензирования 30.03.26

Принята к публикации 02.04.26

D.Y. RUSANOV¹, S.A. SERBIN¹¹FSAEI HE Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Mira str., 19, Yekaterinburg, 620002, Russian Federation

ON THE SEARCH FOR LIMITING FORCES IN NORMAL SECTIONS OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS WHEN CALCULATING USING A NONLINEAR DEFORMATION MODEL

Abstract

Introduction. The article analyses the stress-strain states of reinforced concrete elements when calculating the strength of normal sections using a nonlinear deformation model NDM, proposes a method for describing axial deformations and forced in the form of function parameters, introduces criteria for grouping deformed states based on emerging forces. An analytical method is proposed for determining the limiting forces in the normal section of a reinforced concrete element when calculating strength according to NDM.

Aim. Development of a methodology for finding the limiting forces at which there is no significant degradation of the rigidity of the normal section in a reinforced concrete element when calculating using the NDM, which does not require the use of numerical modeling tools.

Results. The results of the research showed that recording the deformed states of the section in the form of parameters of the axial deformation equation makes it possible to describe the mechanisms of NDM in the form of a system of nonlinear equations, which makes it possible to express direct analytical dependencies for finding deformations from forces. A group of stress-strain states of normal sections has been identified, which can be characterized, from the point of view of forces, as close to the maximum possible (about 90...100 % in bending moment), and from the point of view of rigidity – as a boundary, after crossing which a sharp degradation of the rigidity characteristics of the section is observed. Analytical dependencies describing the identified group made it possible to abandon the use of numerical methods to determine limiting forces according to NDM.

Conclusions. A method for determining the limiting forces in the normal section of reinforced concrete elements when calculating according to the NDM has been developed, which does not require the use of numerical models. The essence of the method lies in the established mutual dependencies between the parameters of equation of the deformed state of the section, at which forces close to maximum possible are observed in it, and there is no

sharp degradation of the rigidity characteristics of the normal sections.

Keywords: reinforced concrete structures, normal cross sections, calculation, strength, nonlinear deformation model, ultimate deformations, analytical methods

For citation: Rusanov D.Y., Serbin S.A. On the search for limiting forces in normal sections of reinforced concrete elements when calculating using a nonlinear deformation model. *Concrete and reinforced concrete*, 2026, no. 3 (634), pp. 112–123. [https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3\(634\)-112-123](https://doi.org/10.37538/0005-9889-2026-3(634)-112-123). (In Russian) EDN: KUKGAK

Authors contribution statement

The authors made an equal contribution to the problem statement, research, evaluation of results.

Funding

No funding support was obtained for the research.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interest.

Received 23.02.26

Revised 30.03.26

Accepted 02.04.26

Введение

Нелинейной деформационной (далее – НДМ) называют модель расчета строительных конструкций, способную учитывать нелинейное поведение материала под нагрузкой.

Основным документом, нормирующим применение НДМ к расчетам железобетонных конструкций в РФ, является [1]. В нем предписывается определять усилия и деформации элемента при помощи сложной системы математических операторов, а также описывать сечение при помощи методов численного моделирования.

Математические операции, производимые численными моделями, отличаются трудоемкостью как поиска одного решения (состояния), так и увязки нескольких решений и нахождения взаимосвязей, а также создают противоречие: неустранимая погрешность модели тем ниже, чем выше ее сложность [2]. Вместе с этим данный метод полностью исключает возможность записи функциональной зависимости между вводными данными и результатом.

На этом фоне становится видна основная проблема применения численных методов к решению задач НДМ – непредсказуемость результата и сложность анализа: заранее оценить результат решения невозможно (его выполнимость, наличие или отсутствие корней)

ввиду сложности расчета и отсутствия записи обратных зависимостей, невозможно и оценить эффективность использования возможностей рассматриваемого сечения, допустимость отдельных состояний.

Для решения выявленной проблемы предлагается рассмотреть закономерности, лежащие в основе НДМ и механики деформируемого твердого тела, а именно – сами деформации и усилия в сечении.

Описание параметров деформаций и усилий нормального сечения

При соблюдении гипотезы плоских сечений осевая деформация в нормальном сечении может быть описана функцией (рис. 1):

$$\varepsilon_{(z)} = kz + \varepsilon_o \quad (1)$$

где k – относительная кривизна элемента, равная произведению абсолютной кривизны элемента и высоты сечения, численно равная разнице осевых перемещений крайних нижнего и верхнего волокон соответственно: $\varepsilon_n - \varepsilon_b$, м/м;

ε_o – осевое перемещение в точке начала координат z , м/м;

z – относительная координата точки в сечении, равная отношению абсолютной координаты z_{abs} к полной высоте сечения h , м/м.

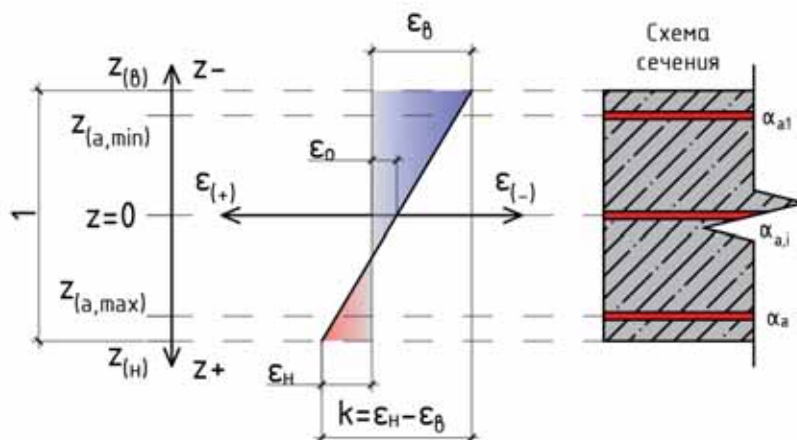


Рис. 1. Параметры осевой деформации нормального сечения
Fig. 1. Parameters of axial deformation of a normal section

При использовании численного интегрирования нормативными документами [1, 3] предписано производить проверку деформаций сечения по допустимости для его отдельных частей, из-за чего для анализа принимаются несколько статичных точек z_p , описывающих характер этих деформаций.

Данный подход непрактичен для аналитического решения, в связи с чем предлагается представлять осевые деформации сечения в виде вектора $\bar{D}$, координаты которого описывают параметры функции (1) в плоскости (ε_o ; k):

$$\varepsilon_{(z)} = \bar{D} = \begin{bmatrix} k \\ \varepsilon_o \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} z^1 \cdot k \\ z^0 \cdot \varepsilon_o \end{matrix} \quad (2)$$

Подобная (1) форма записи усилий в сечении приведена в [1, ф (8.33)]:

$$M_{(z)} = N \cdot z_{abs} + M_o, \quad (3)$$

где N – результирующая продольная сила, действующая в сечении, Н;

M_o – значение изгибающего момента в сечении, полученное относительно точки z , Нм;

z_{abs} – координата точки приложения продольной силы N , м.

Данная форма записи позволяет описать $M_{(z)}$ в виде вектора, однако для унификации решения для различных классов бетона, характеристик положения и количества арматуры в сечении, требует преобразования в относительные величины по методике, схожей с [4]:

$$\alpha_n = \frac{N}{R_b \cdot b \cdot h} \quad (4)$$

$$\alpha_m = \frac{M}{R_b \cdot b \cdot h^2} \quad (5)$$

$$\alpha_{a,i} = \frac{N_{s,i}}{R_b \cdot b \cdot h} = \frac{R_s \cdot A_{s,i}}{R_b \cdot b \cdot h} \quad (6)$$

$$\eta_{a,i} = \frac{a_i}{h} \quad (7)$$

где α_n – силовой коэффициент продольной силы, безразмерная;

α_m – силовой коэффициент изгибающего момента, безразмерная;

N – продольная сила, кН;

M – изгибающий момент, кНм;

R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию, МПа;

b – ширина бетонного сечения, м;

h – полная высота бетонного сечения, м.

$\alpha_{a,i}$ – силовой коэффициент i -й зоны армирования сечения;

R_s – расчетный предел текучести арматуры, МПа;

$A_{s,i}$ – площадь i -й зоны армирования сечения, м²;

a_i – привязка i -й зоны армирования к верхней грани сечения, м;

$\eta_{a,i}$ – то же, отнесенное к высоте сечения.

Из чего уравнение (3) принимает вид:

$$\alpha_{m(z)} = \bar{R} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{m,0} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} z^1 \cdot \alpha_n \\ z^0 \cdot \alpha_{m,0} \end{matrix} \quad (8)$$

где $\bar{R}$ – вектор реактивных усилий в сечении, в плоскости координат (α_n ; $\alpha_{m,0}$);

$\alpha_{m,0}$ – значение M_o , описанное в относительных величинах.

Для нахождения реальных усилий в (8) следует на место z подставить координату центра тяжести сечения z_c , однако следует помнить, что для различных деформированных состояний сечения координата z_c не будет постоянной, как при упругой постановке задачи, что описано в учебных пособиях [5, 6] и подтверждается исследованием [10].

При внимательном рассмотрении уравнения (3) можно заметить, почему в большом количестве

работ [7, 8, 9] приводится сравнение для напряженно-деформированного состояния (далее – НДС) чистого изгиба – при $N = 0$ оно принимает вид:

$$M_{(z)} = M_o = C$$

или

$$\alpha_{m(z)} = \alpha_{m,0} = C,$$

при котором ошибка в определении z_c (или ее сдвиг при переходе из одного деформированного состояния в другое) не играет роли – функция $M_{(z)}$ постоянна для любой точки отсчета, как и жесткостные характеристики сечения.

Следует отметить, что далее в работе под словами «деформация» и «усилие» будут подразумеваться точки в системах координат параметров (k ; ϵ_o) и (α_n ; $\alpha_{m,0}$) соответственно, описывающие векторы функций (2, 8).

Взаимосвязь усилий – деформаций и нелинейная работа материалов

Векторная форма записи деформаций (2) и усилий (8) позволяет говорить о том, что при описании одного и того же НДС сечения в одной и той же системе координат z , взаимосвязь между ними возможно представить в виде матриц, вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \epsilon_o \end{bmatrix} = A \cdot \bar{D} = \bar{R} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{m,0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{m,0} \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \bar{R} = \bar{D} = \begin{bmatrix} k \\ \epsilon_o \end{bmatrix} \quad (10)$$

где A – матрица преобразования деформаций в усилия;

A^{-1} – то же, усилий в деформации;

a_{ij} – коэффициенты матрицы A .

Очевидно, что данные матрицы в виде массива коэффициентов СЛАУ возможны к записи только в случае соблюдения закона Гука, то есть линейной зависимости между напряжениями–деформациями. НДМ позволяет учитывать нелинейное поведение систем при помощи диаграмм деформирования материалов. В рамках данной статьи рассматриваются двухлинейные диаграммы арматуры (рис. 2а) и бетона (рис. 2б).

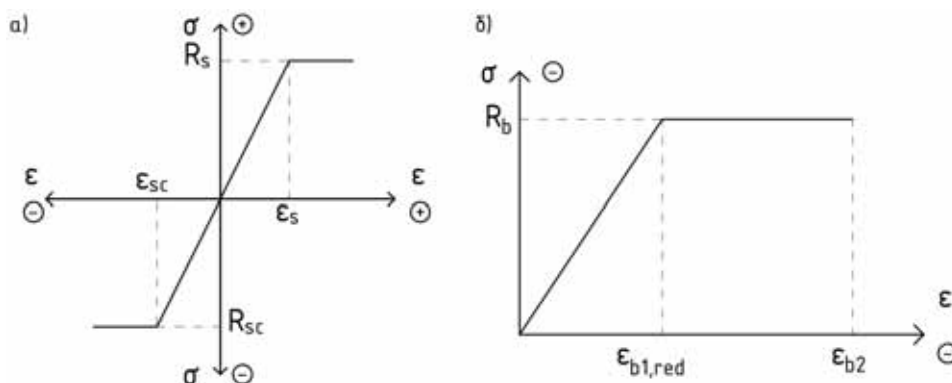


Рис. 2. Схема применяемых диаграмм состояния материалов: а – арматуры, б – бетона
Fig. 2. Scheme of the applied diagrams of the state of materials: а – reinforcement, б – concrete

В случае проявления нелинейных свойств материалов матрицы (9, 10) принимают вид системы нелинейных уравнений (далее СНУ):

$$\begin{cases} k = f(\alpha_n, \alpha_{m,0}) \\ \varepsilon_0 = g(\alpha_n, \alpha_{m,0}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = p(k; \varepsilon_0) \\ \alpha_{m,0} = q(k; \varepsilon_0) \end{cases} \quad (11)$$

где f, g – функции преобразования усилий в деформации;

p, q – то же, деформаций в усилия.

При этом запись СНУ в явном виде для p и q возможна и зависит от выбранных диаграмм деформирования, приведена в общем виде далее (18).

Условие монотонности и деградация жесткости

При внимательном рассмотрении диаграмм деформирования материалов (рис. 2) можно заметить, что жесткость материалов, составляющих железобетонное сечение, описывается нелинейной зависимостью, у которой с нарастанием модуля деформаций $|\varepsilon|$, модуль упругости $E_{(\varepsilon)} = \sigma_{(\varepsilon)}/\varepsilon$ либо остается прежним, либо уменьшается, то есть:

$$(\forall \varepsilon_i \in [\varepsilon])(\exists |\varepsilon_j| > |\varepsilon_i|)(\varepsilon_j \in [\varepsilon]): \left(\frac{\sigma_j}{\varepsilon_j} = E_j \leq E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) \quad (12)$$

Из вышесказанного следует, что описываемые диаграммы деформирования должны соблюдать условие монотонности, определяемый, как:

$$(\forall \varepsilon_i \in [\varepsilon])(\exists \varepsilon_j > \varepsilon_i)(\varepsilon_j \in [\varepsilon]): (\sigma_j \geq \sigma_i) \quad (13)$$

и необходимый, главным образом, для соблюдения требования биективности преобразований (9...11). В общем случае монотонность диаграммы нарушается вследствие: разрушения бетона от чрезмерных деформаций сжатия, разрыва арматурных стержней, работы бетона на растяжение вблизи трещины.

В нормативной документации превышение деформаций разрыва арматуры или сжатого разрушения бетона запрещено согласно [1, п. 8.1.24], но трещинообразование для бетона является естественным и, часто, допустимым явлением. Здесь соблюдение монотонности предлагается достигнуть пренебрежением растянутой работой бетона в виду его малой доли в общей работе нормального сечения, а также [1, п. 8.1.20].

Следует отметить, что для любой другой диаграммы состояний материалов условие монотонности будет выполнено при соблюдении описанных выше ограничений.

При соблюдении условия монотонности (13) и снижения модуля упругости (12) можно отметить следующее: пусть существуют два вектора $\bar{R}_i, \bar{R}_j$, такие, что $\bar{R}_i + \bar{r} = \bar{R}_j$, где $\bar{r}$ ($\Delta \alpha_n = 0; \Delta \alpha_{m,0} > 0$) и соответствующие им $\bar{D}_i + \bar{b} = \bar{D}_j$, где $\bar{b}$ ($\Delta k > 0; \Delta \varepsilon_0$), тогда справедливо:

$$\frac{\alpha_{m,0,i}}{k_i} \geq \frac{\alpha_{m,0,j}}{k_j} \quad (14)$$

То есть увеличение кривизны k не может привести к увеличению жесткостных характеристик сечения. Таким образом функция жесткости, описываемая на некоторой линии усилий $\alpha_n = const$ будет монотонной

и невозрастающей в направлении от нейтральной оси $k = 0$. Подтверждение данной гипотезы наглядно продемонстрировано далее (рис. 6).

Группировка деформированных состояний

Поскольку СНУ (11) должна описывать приближенное к реальному поведение материалов, всегда будет существовать конечный вектор $\bar{R}(\alpha_n; \alpha_{m,0})$, соответствующий экстремуму возможных усилий в нормальном сечении. На основе этого утверждения предлагается разделить НДС сечения на математически невозможные (в плоскости $(k; \varepsilon_0)$ не существует вектора $\bar{D}$, способного описать усилие $\bar{R}$) и возможные (то же, $\bar{D}$ существует).

Математически возможные состояния также следует разделить на две группы: допустимые и экстремальные. Под экстремальными в статье подразумеваются состояния, при которых сечение проявляет чрезмерную пластичность, которую можно описать малым приращением аргумента усилия от приращения деформации, то есть малым значением секущего модуля упругости E_{sh} сечения:

$$E_{sh} = \frac{d\alpha_{m,0}}{dk \cdot I_{(k;\varepsilon_0)}} \quad (15)$$

Или

$$E_{sh} = \frac{d\alpha_n}{d\varepsilon_0 \cdot A_{(k;\varepsilon_0)}}$$

где $d\alpha_{m,0}$ – дифференциал изгибающего момента $\alpha_{m,0}$ в точке $(k; \varepsilon_0)$ по направлению dk ;

$d\alpha_n$ – дифференциал продольной силы α_n в точке $(k; \varepsilon_0)$ по направлению $d\varepsilon_0$;

$I_{(k;\varepsilon_0)}$ – функция момента инерции, включенной в работу части сечения;

$A_{(k;\varepsilon_0)}$ – функция площади, включенной в работу части сечения.

Или любой комбинацией приращения двух аргументов относительно двух переменных при помощи градиента (секущей E_{sh} по искомому направлению).

Очевидно, что область допустимых деформаций меньше, чем область возможных, по этой причине она является подмножеством возможных деформаций. Деформированные состояния (далее – ДС), находящиеся на границе допустимых и экстремальных, далее предлагается называть предельными.

Предельные деформированные состояния (далее – ПДС) можно охарактеризовать как значения $\bar{D}_{ult}(k; \varepsilon_0)$, соответствующие почти полному исчерпанию несущей способности по аргументу α_n или $\alpha_{m,0}$ (16) и резким падением жесткости сечения при его превышении (17): пусть $\alpha_{m,ult}$ – некоторое значение изгибающего момента при предельном состоянии, $\alpha_{m,max}$ – некоторое максимальное из возможных значений изгибающего момента, а k_{ult}, k_{max} – соответствующие им значения кривизн элемента, тогда справедливо:

$$\frac{\alpha_{m,ult}}{\alpha_{m,max}} = 0,9 \dots 1,0 \quad (16)$$

$$E_{sh(\alpha_{m,ult-})} = \lim_{\alpha_{m,0} \rightarrow \alpha_{m,ult-}} \left(\frac{d\alpha_{m,0}}{dk \cdot I(k; \epsilon_0)} \right) \gg \lim_{\alpha_{m,0} \rightarrow \alpha_{m,ult+}} \left(\frac{d\alpha_{m,0}}{dk \cdot I(k; \epsilon_0)} \right) = E_{sh(\alpha_{m,ult+})} \quad (17)$$

Предложенная методика классификации деформированных состояний, а также линия, описывающая множество ПДС сечения приведены на рисунке 3.

Вырождение системы нелинейных уравнений
В общем виде уравнения СНУ (11), описывающие зависимость усилий от деформаций, имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha_n = \sum \left(\alpha_{a,i} \frac{\epsilon_{a,i}}{\epsilon_s} \right) + \alpha_{b,el} + \alpha_{b,spl} + \alpha_{b,pl} \\ \alpha_{m,0} = \sum \left(\alpha_{a,i} \frac{\epsilon_{a,i}}{\epsilon_s} z_{a,i} \right) + \alpha_{b,el} z_{b,el} + \alpha_{b,spl} z_{b,spl} + \alpha_{b,pl} z_{b,pl} \end{cases} \quad (18)$$

где $\alpha_{b,el}$ – силовой коэффициент продольной силы, приходящейся на упругую стадию работы бетона (индекс «el» = elastic);

$\alpha_{b,spl}$ – то же, на упруго-пластичную стадию, при ее наличии на диаграмме состояний бетона (индекс «spl» = semiplastic);

$\alpha_{b,pl}$ – то же, на пластичную стадию (индекс «pl» = plastic);

$z_{b,el}$ – координата приложения силы, равнодействующей $\alpha_{b,el}$;

$z_{b,spl}$ – то же, для $\alpha_{b,spl}$;

$z_{b,pl}$ – то же, для $\alpha_{b,pl}$.

При этом каждый из членов правой части СНУ (18) представляет собой рациональную функцию от двух переменных: k и ϵ_0 . Для любой диаграммы деформирования решение такой системы сводится к уравнению степени 5 и выше, из-за чего аналитический поиск корней в радикалах невозможен (теорема Абеля–Руффини) и система требует дополнительного анализа.

По этой причине следует обратить пристальное внимание к признакам определения ПДС: условие (17) выполнимо при разрыве производной, что невозможно для аналитической модели бетона в сечении – он определен по всей высоте сечения и пластические свойства проявляет аффинно. Напро-

тив – арматура в сечении упрощена до материальной точки некоторой площади A_s (параметра $\alpha_{a,i}$), и потому начало пластической работы за границами ϵ_s (и ϵ_{sc}) приведет к выполнению условия (17), поэтому во всяком предельном ДС сечения известна деформация одного из арматурных стержней, которая численно равна ϵ_s или ϵ_{sc} .

В этом случае решение сводится к поиску линии на плоскости ($k; \epsilon_0$) с известным соотношением параметров, из-за чего степень искомого уравнения снижается, а система вырождается до одной неизвестной.

Описание предельных НДС в плоскости деформаций

Для описания предельных деформаций в нормальном сечении допустим, что число слоев армирования составляет $i \geq 2$, не расположенных на одной и той же координате $z_{a,i}$, тогда согласно рис. 2, координаты слоев армирования:

→ крайнего нижнего – $z_{a,max} = \max z_{a,i}$;

→ крайнего верхнего – $z_{a,min} = \min z_{a,i}$.

Согласно условию вырождения СНУ (18), у всякого ПДС известна деформация хотя бы одной из точек: $\epsilon_{(z_{a,max})} = \epsilon_s$ или $\epsilon_{(z_{a,min})} = \epsilon_{sc}$. Существует особое ПДС, при котором оба этих условия выполняются, назовем возникающее при его соблюдении усилие $\alpha_{n,med}$, тогда для всякого усилия $\alpha_n \leq \alpha_{n,med} - \epsilon_{(z_{a,max})} = \epsilon_s$, а соотношение k_{ϵ_0} принимает вид:

$$k_{ult} = (\epsilon_s - \epsilon_0) / z_{a,max} \quad (19)$$

Напротив, для $\alpha_n \geq \alpha_{n,med}$:

$$k_{ult} = (\epsilon_{sc} - \epsilon_0) / z_{a,min} \quad (20)$$

Нахождение $\alpha_{n,med}$ при известных осевых деформациях сечения представляет собой тривиальную задачу. Зависимость (20) описывает восходящую ветвь графика несущей способности, а (21) – нисходящую ветвь.

В нормативной документации величиной $\epsilon_{b,ult}$ ограничивается деформация самого сжатого волокна в сечении [1]. Практика расчетов показывает, что данное требование соблюдается при $a/h = a'/h \leq 20\%$ для всех описанных выше предельных состояний.

Аналитическое определение предельных усилий

Любое ПДС можно определить, как множество $\bar{D}_{ult}(k; \epsilon_0)$ с известным соотношением параметров

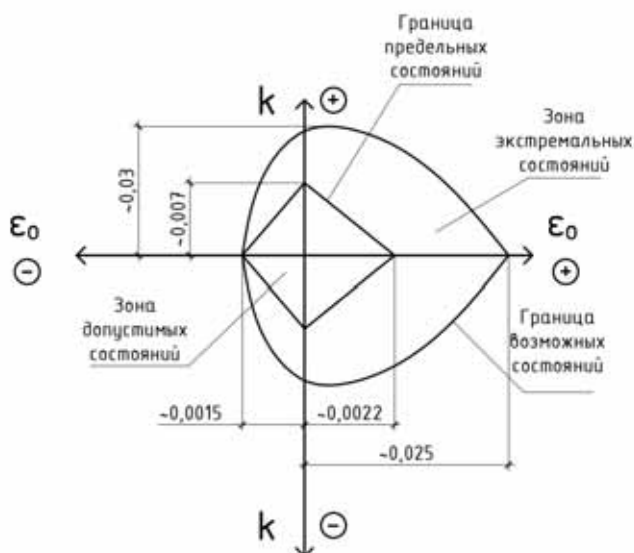


Рис. 3. Классификация деформированных состояний сечения
Fig. 3. Classification of deformed states of the section

(19, 20). В этом случае одна неизвестная может быть выражена через другую и СНУ (18) может быть упрощена до функции, имеющей вид:

$$ak^2 + bk + c = 0 \quad (21)$$

где a, b, c – коэффициенты канонического квадратного уравнения, зависящие от расчетного случая и подгрупп ПДС, при этом $b_{(\alpha_n)}$.

Уравнение (21) возможно представить в виде полинома:

$$(k - k_1)(k - k_2) = 0$$

Где:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

При этом один и только один из корней корректно описывает ряд предельных НДС сечения, при чем, внутри одной подгруппы, всегда один и тот же.

Решение уравнения (21) дает корень для искомого ПДС сечения при заданном усилии α_n , значение ϵ_o определяется на основании (19, 20), а значение – на основании полученных деформаций k, ϵ_o .

Следует отметить, что изложенные выше принципы расчета применимы к любой кусочно-линейной диаграмме состояний материалов сечения при незначительной доработке.

Пример решения по заданному усилию

Описанные выше положения требуют демонстрации на примере.

Пусть к проверке ряда состояний дан прямоуголь-

ный железобетонный элемент с двумя зонами армирования (нижней и верхней) такой, что:

→ ширина и высота сечения – $b = h = 400$ мм;

→ арматура класса – А500: $R_s = 435$ Мпа; $R_{sc} = 400$ Мпа; $E_s = 200000$ Мпа;

→ класс бетона – В40: $R_b = 22,0$ Мпа;

→ характеристики армирования: $a = a' = 40$ мм; $A_s = A_{sc} = 1500$ мм²; $\alpha_a = \alpha_{a1} = 0,185369$; $z_a = 0,4$; $z_{a1} = -0,4$;

→ точкой отсчета (началом координат z) принята середина бетонного сечения.

Требуется построить график несущей способности нормального сечения и обосновать соблюдение условий (16, 17) для описанных зависимостей предельных деформаций (19, 20). Диаграммы деформирования принимаем двухлинейные (рис. 2). График несущей способности построим по заданным множествам параметров: деформации ϵ_o (22) и усилия α_n (23):

$$\{\epsilon_s; 0,002; 0,0015; \dots; -0,0015; -0,00175|\epsilon_o\} \quad (22)$$

$$\{2\alpha_a; 0,2; 0; -0,2; \dots; -1,2|\alpha_n\} \quad (23)$$

Для множества (22) из зависимостей (19), (20) определено соответствующее множество $\{k_{ult}\}$, на основании полученных деформаций построен график в плоскости $(\alpha_n; \alpha_{m,0})$. Результаты расчета приведены в таблице 1. График несущей способности приведен на рис. 4.

Перевод данных из относительных величин в абсолютные по (4, 5) с учетом исходных данных задачи:

$$1\alpha_n \Leftrightarrow 3520 \text{ кН}; 1\alpha_m \Leftrightarrow 1408 \text{ кНм}$$

Таблица 1

Результаты расчета предельных деформированных состояний сечения по ряду заданных перемещений ϵ_o (22)

Table 1

Results of calculating the ultimate deformation states of a section for a series of specified displacements ϵ_o (22)

№ поз.	ϵ_o	k_{ult}	ϵ_n	ϵ_b	α_n	$\alpha_{m,ult}$	$N, \text{ кН}$	$M, \text{ кНм}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0,002175	0,000000 (по 19)	0,002175	0,002175	0,370739	0	1305	0
2	0,002000	0,000438 (по 19)	0,002219	0,001781	0,340909	0,011932	1200	16,8
3	0,001500	0,001688 (по 19)	0,002344	0,000656	0,255682	0,046023	900	64,8
4	0,001000	0,002938 (по 19)	0,002469	-0,00047	0,145521	0,091254	512,2	128,5
5	0,000500	0,004188 (по 19)	0,002594	-0,00159	-0,116265	0,189305	-409,3	266,5
6	0,000000	0,005000 (по 20)	0,002500	-0,00250	-0,350000	0,246364	-1232	346,9
7	-0,000500	0,003750 (по 20)	0,001375	-0,00238	-0,518561	0,218384	-1825,3	307,5
8	-0,001000	0,002500 (по 20)	0,00025	-0,00225	-0,770455	0,173182	-2712	243,5
9	-0,001500	0,001250 (по 20)	-0,00088	-0,00213	-1,15152	0,068813	-4053,4	96,8

Для множества (23) на основании (19, 20, 21) определены соответствующие множества $\{k_{ult}(\alpha_n)\}$ и $\{\epsilon_o(k_{ult})\}$, после чего найдено множе-

ство усилий $\{\alpha_n; \alpha_{m,0}\}$. Результаты расчета приведены в таблице 2 и на графике несущей способности (рис. 4).

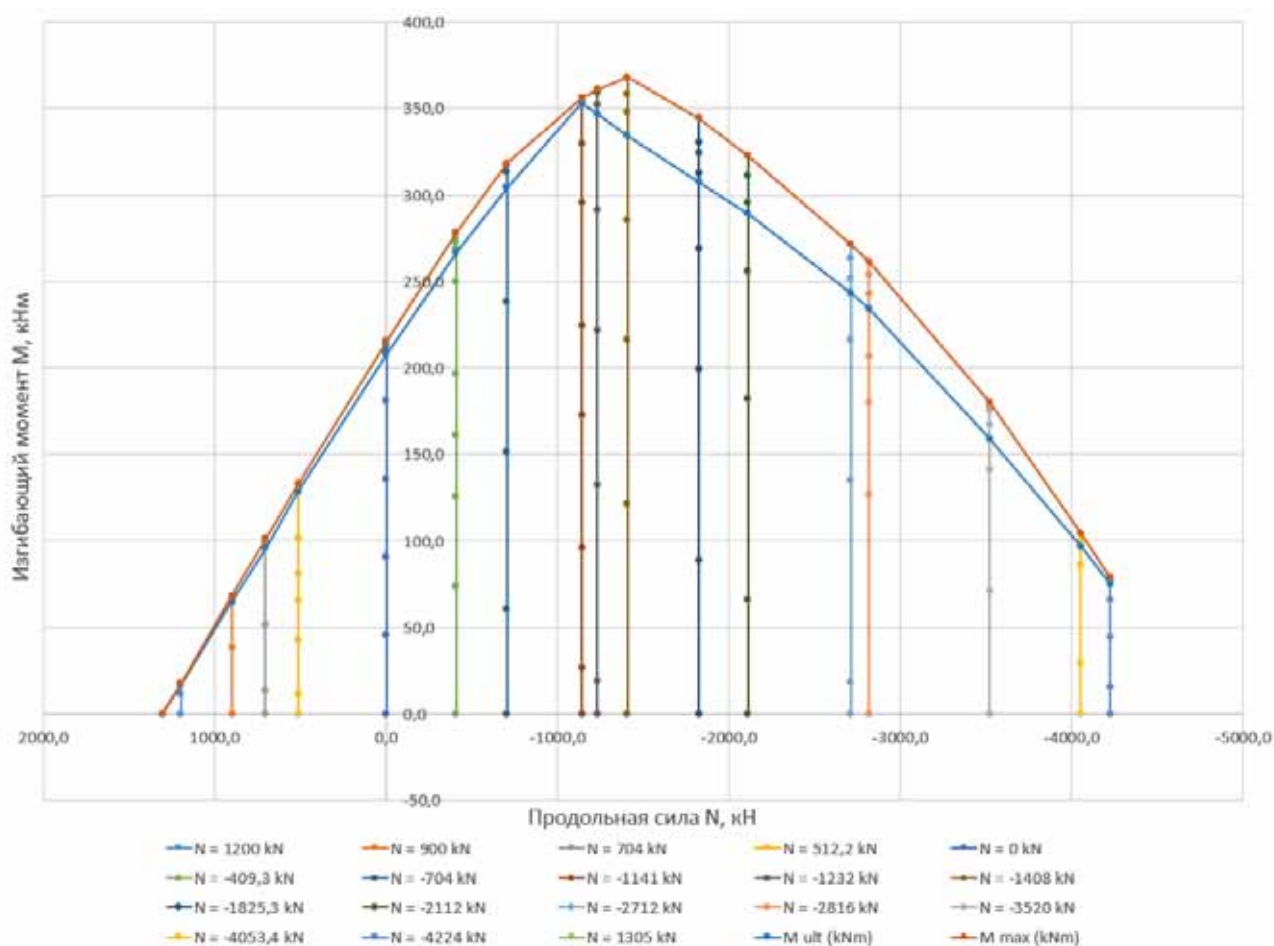


Рис. 4. Графики несущей способности по линиям M_{ult} , M_{max}
 Fig. 4. Graphs of bearing capacity along the lines M_{ult} , M_{max}

Таблица 2

Результаты расчета предельных деформированных состояний сечения по множеству заданных α_n (23)

Table 2

Results of calculating the ultimate deformation states of a section for a set of specified α_n (23)

№ поз.	ε_o	k_{ult}	ε_n	ε_b	α_n	$\alpha_{m,ult}$	N, кН	M, кНм
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0,002175	0,000000 (по 19)	0,002175	0,002175	0,370739	0,000000	1305	0
2	0,001175	0,002497 (по 19)	0,002424	-0,00007	0,200000	0,068355	704	96,1
3	0,000698	0,003692 (по 19)	0,002544	-0,00115	0,000000	0,147862	0	208,1
4	0,000348	0,004567 (по 19)	0,002632	-0,00194	-0,200000	0,216093	-704	304,3
5	-0,000160	0,004592 (по 20)	0,002133	-0,00246	-0,400000	0,237631	-1408	334,5
6	-0,000690	0,003271 (по 20)	0,000944	-0,00233	-0,600000	0,205293	-2112	289,1
7	-0,001040	0,002393 (по 20)	0,000154	-0,00224	-0,800000	0,166432	-2816	234,3
8	-0,001300	0,001754 (по 20)	-0,00042	-0,00218	-1,000000	0,113126	-3520	159,3
9	-0,001570	0,001074 (по 20)	-0,00103	-0,00211	-1,200000	0,053328	-4224	75,1

Следует отметить, что данные таблиц 1, 2 получены строго аналитически, без применения численных методов.

Доказательство точности расчетных положений

Для доказательства точности изложенных выше расчетных положений, применены численные

методы, а именно: для каждого из значений α_n , изложенных в таблицах 1, 2, рассмотреть множество вариантов ДС, с целью поиска максимального из возможных значений изгибающего момента $\alpha_{m,max}$, а также с целью анализа жесткостных характеристик сечения по (15).

Данные таблиц 1, 2 для удобства представления информации объединены и отсортированы по убыванию α_n в таблице 3 вместе с результатами поиска усилий $\alpha_{m,max}$ и соответствующих им деформаций $\bar{D}(k; \varepsilon_o)$.

Результаты численного поиска $\bar{D}(k; \varepsilon_o)$ для $M_{max(N)}(\alpha_{m,max})$, а также значения приведены на рисунке 4.

Таблица 3

Результаты поиска и анализа экстремальных состояний, сравнение с характеристиками предельных состояний

Table 3

Results of the search and analysis of extreme states, comparison with the characteristics of limit states

№ поз.	N , кН	M_{ult} , кНм	M_{max} , кНм	$\frac{M_{ult}}{M_{max}}$, %	$\varepsilon_{o,max}$	k_{max}	EI_{ult} , МН·м ²	EI_{max} , МН·м ²	$\frac{EI_{ult}}{EI_{max}}$, %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	1305	0,0	0	100	0,002175	0,000000	15,36	0,00	0
2	1200	16,8	17,6	95	0,013381	0,028663	15,27	0,25	2
3	900	64,8	68,3	95	0,013096	0,029691	15,34	0,92	6
4	704	96,1	101,4	95	0,012788	0,030076	15,40	1,35	9
5	512	128,4	132,7	97	0,012631	0,03082	17,43	1,72	10
6	0	208,1	215,5	97	0,009487	0,025974	22,39	3,32	15
7	-409	266,6	278,5	96	0,005408	0,017816	25,44	6,25	25
8	-704	304,3	318,3	96	0,002835	0,012670	26,58	10,05	38
9	-1141	353,1	355,9	99	0,000546	0,008091	27,07	17,60	65
10	-1232	346,9	361,1	96	0,000269	0,007537	27,69	19,16	69
11	-1408	334,5	368,1	91	-0,00019	0,006613	29,11	22,27	77
12	-1825	307,5	344,4	89	-0,00067	0,005668	32,77	24,30	74
13	-2112	289,1	322,7	90	-0,000905	0,005189	35,21	24,87	71
14	-2712	243,5	271,4	90	-0,001332	0,004336	38,97	25,03	64
15	-2816	234,3	261,6	90	-0,001396	0,004201	39,07	24,87	64
16	-3520	159,3	180,3	90	-0,001773	0,003455	36,17	20,88	58
17	-4053	96,8	104,1	93	-0,001840	0,002320	30,83	17,94	58
18	-4224	75,1	79,1	95	-0,001891	0,002017	27,79	15,68	56

Примечания:

1. Данные о параметрах (k_{ult} ; $\varepsilon_{o,ult}$) приведены в табл. 1, 2.
2. Значение EI_{max} в строке 1 определено при помощи пределов.

Результаты численного поиска $M_{max(N)}$ (табл. 3) показали, что условие (16) выполняется, минимальное значение соотношения предельного и экстремального изгибающих моментов составило 90 %. Выполнение условия (17) можно отследить на графиках (рис. 5, 6) – для любого N наблюдается резкая деградация жесткости сечения после превышения предельного изгибающего момента $M_{ult(N)}$, что подтверждает гипотезу (14). Сравнительный анализ характеристик сечения

для линий $M_{ult(N)}$ и $M_{max(N)}$ (рис. 4) также показал существенное отличие конечных значений изгибных жесткостей (рис. 7) при малом (менее 10 %) отличии значений самих аргументов $M_{ult(N)}$ и $M_{max(N)}$ (рис. 4).

Следует отметить, что в табл. 3 приведены состояния, соответствующие полному спектру значений продольной силы N в рассматриваемом сечении – от предельного растяжения [1, 8.1.18] до предела устойчивости [1, п. 8.1.16].

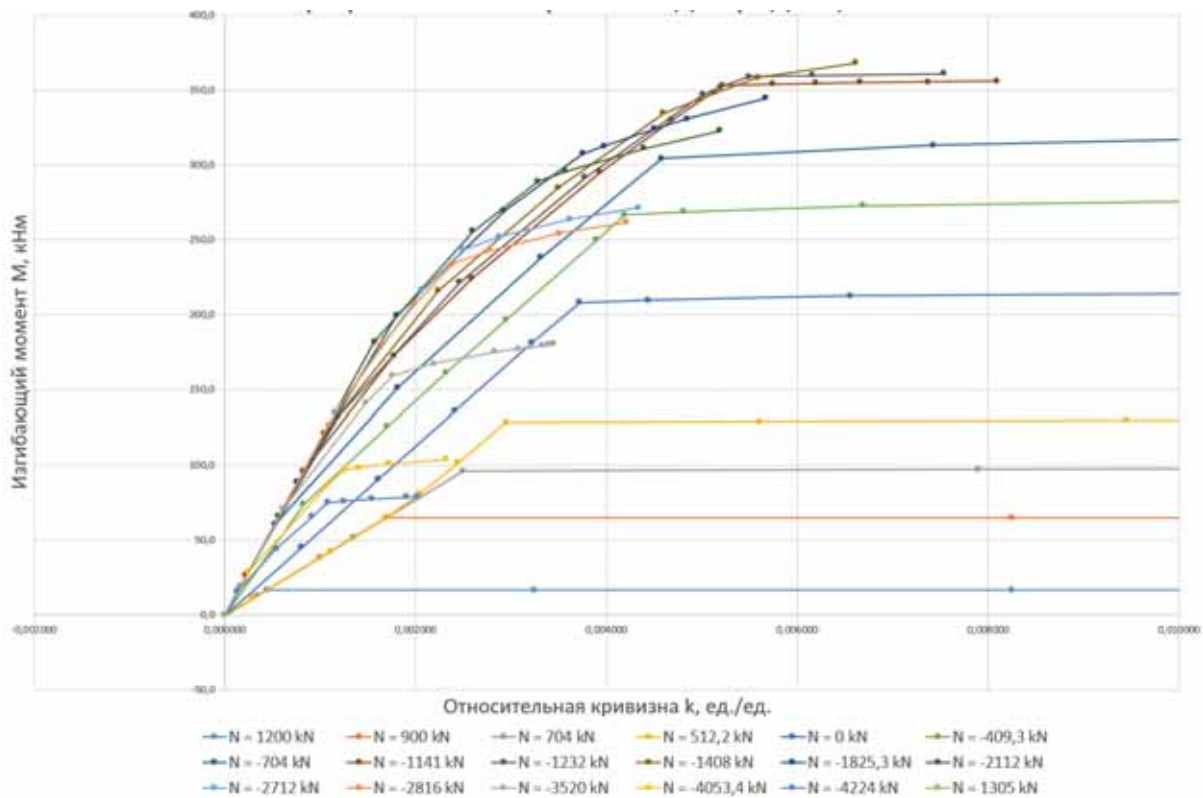


Рис. 5. График «момент–кривизна» для рассматриваемых состояний $N_i = \text{const}$
 Fig. 5. The "moment–curvature" graph for the considered states $N_i = \text{const}$

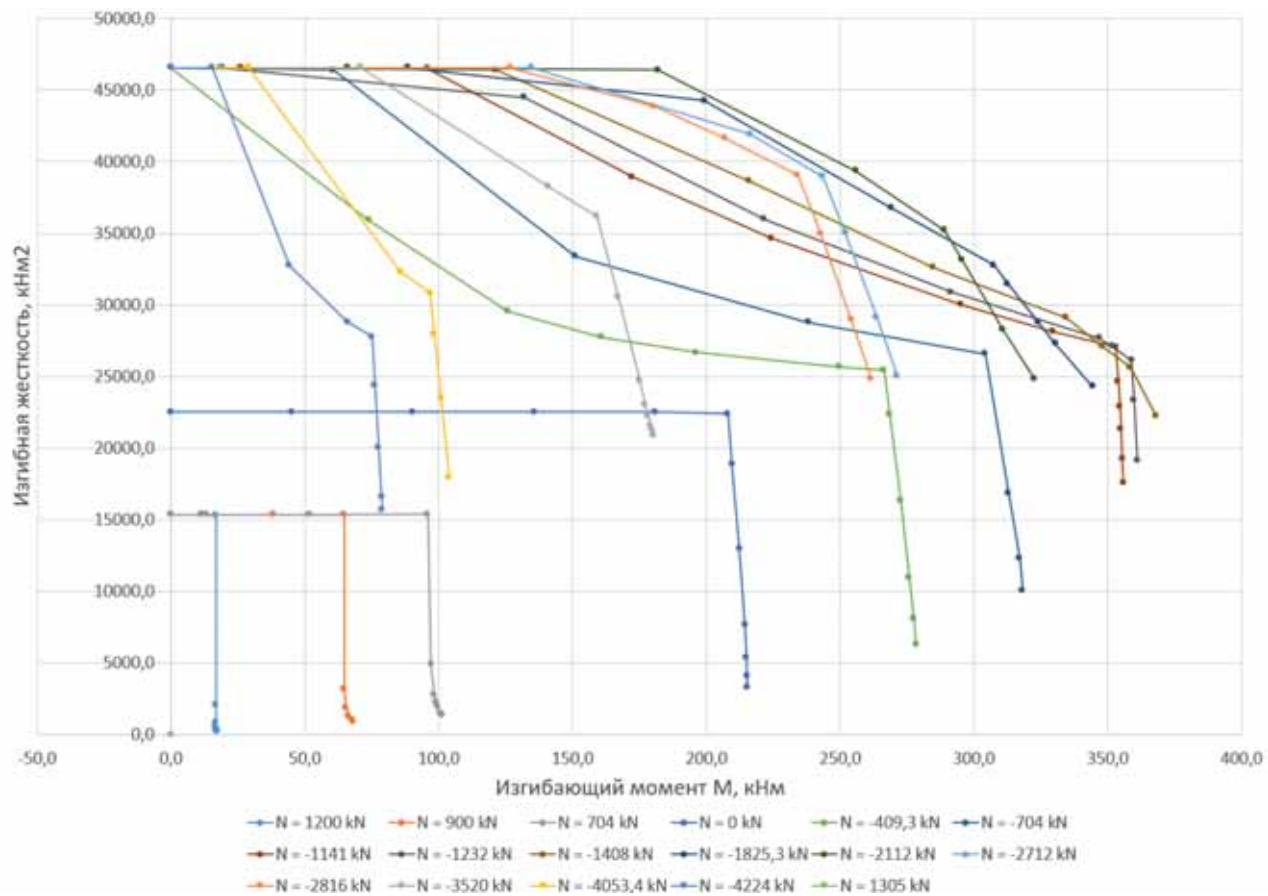


Рис. 6. График деградации жесткости для рассматриваемых состояний $N_i = \text{const}$
 Fig. 6. Graph of stiffness degradation for the considered states $N_i = \text{const}$

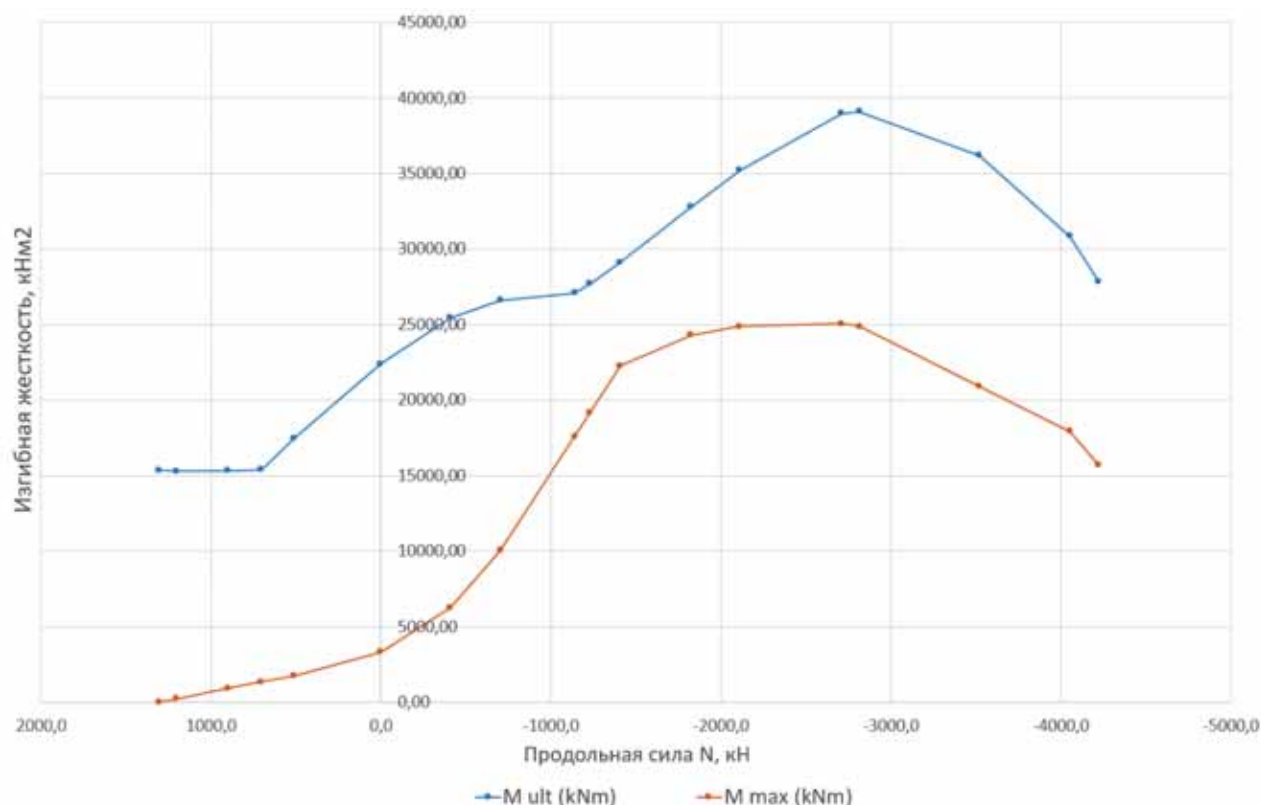


Рис. 7. График изгибной жесткости для линий M_{ult} , M_{max}
 Fig. 7. Graph of bending stiffness for lines M_{ult} , M_{max}

Результаты

Результаты проведенного исследования показали, что запись деформированных состояний сечения в виде параметров уравнения осевых деформаций позволяет описать механизмы НДМ в форме системы нелинейных уравнений, позволяющей выразить прямые аналитические зависимости для нахождения деформаций от усилий. Выявлена группа НДС нормальных сечений, которую можно охарактеризовать, с точки зрения усилий, как близкую к максимальным из возможных (порядка 90...100 % по изгибающему моменту), а с точки зрения жесткости – как границу, после пересечения которой наблюдается резкая деградация жесткостных характеристик сечения. Аналитические зависимости, описывающие выявленную группу, позволили отказаться от применения численных методов для определения предельных усилий по НДМ.

Выводы

Предложена методика определения предельных усилий в нормальном сечении железобетонных элементов при расчете по НДМ, не требующая применения инструментов численного моделирования.

Выполнена верификация методики при помощи численного моделирования групп состояний, наглядно демонстрирующих резкую деградацию жесткостных характеристик сечения за пределами предельных усилий, определяемых разработанной методикой.

Дальнейшее исследование может быть направлено на поиск подобных зависимостей параметров

уравнения деформированных состояний сечения для поиска предельных косо-внецентренно приложенных нагрузок (поверхность несущей способности по НДМ), а также на детальное описание процессов, происходящих внутри области усилий и деформаций, ограниченных в области, установленной данной методикой.

Список литературы

1. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52–01–2003. Москва: Стандартинформ, 2019. URL: <https://docs.cntd.ru/document/554403082?ysclid=mpnt1e4q7t209731282>
2. Тарасенко Е.О., Алиханова А.А., Гладков А.В. Численные методы: учебник. Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2022. 261 с.
3. СП 16.13330.2017. Стальные конструкции». Актуализированная редакция СНиП II-23–81 (с изменениями № 1–6). URL: <https://docs.cntd.ru/document/456069588?ysclid=mpnt3el02p682684689>
4. Круглые сечения // Расчет железобетонных элементов без предварительно напряженной арматуры: пособие к СП 63.13330 / под общ. ред. Н.Н. Трекина. М.: Минстрой России, 2015. С.115–117.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.: Логос, 2004. 388 с.
6. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т.2. Пластичность / Составители Е.А. Ильюшина, М.Р. Короткина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 480 с.

7. Коянкин А.А. О расчёте железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели // *Academia. Архитектура и строительство*. 2025, № 1. С. 152–159. DOI: <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2025-1-152-159>.
8. Ерышев В.А., Косков М.Ю. К методике определения момента трещинообразования изгибаемых железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели // *Вестник НГИЭИ*. 2017. Т. 79. № 12. С. 32–42.
9. Рязанов М.А., Шишов И.И., Рощина С.И., Лукин М.В. Расчет изгибаемых элементов с учетом физической нелинейности деформирования // *Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова*. 2016. № 12. С. 58–63. DOI: <https://doi.org/10.12737/22764>.
10. Гаджиев М.А. Прочность и устойчивость железобетонных стержневых элементов с применением нелинейных диаграмм деформирования материалов при кратковременном и длительном нагружении: автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. Баку, 2007. 37 с.
7. Koyankin A.A. On the Calculation of Reinforced Concrete Bending Elements Based on a Nonlinear Deformation Model. *Academia. Architecture and construction*, 2025, no. 1, pp. 152–159. DOI: <https://doi.org/10.22337/2077-9038-2025-1-152-159>.
8. Erishev V.A., Koskov M.Y. Towards a method for determining the moment of crack formation of bending reinforced concrete elements using a nonlinear deformation model. *Bulletin NGIEU*, 2017, vol. 79, no. 12, pp. 32–42. (In Russian).
9. Ryazanov M.A., Shishov I.I., Roshina S.I., Lukin M.V. Calculation of the bending elements with allowance for the physical nonlinearity of the strain. *Bulletin BSTU named after V.G. Shukhov*, 2016, no. 12, pp. 58–63. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.12737/22764>.
10. Gadjeiev M.A. Strength and stability of reinforced concrete rod elements using nonlinear diagrams of material deformation under short-term and long-term loading [dissertation]. Baku. 2007. 37 p.

References

1. SP 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. General Provisions. Moscow: Stroyinform; 2019. (In Russian). URL: <https://docs.cntd.ru/document/554403082?ysclid=mpnt1e4q7t209731282>
2. Tarasenko E.O., Alihanova A.A., Gladkov A.V. Numerical Methods: Textbook. Stavropol: NCFU Publ.; 2022. (In Russian).
3. SP 16.13330.2017. Steel structures. Moscow: Standartinform; 2018. (In Russian). URL: <https://docs.cntd.ru/document/456069588?ysclid=mpnt3el02p682684689>
4. Round sections // Calculations of reinforced concrete elements without prestressed reinforcement: allowance for SP 63.13330 / Edn. N.N. Trekin. Moscow: Minstroy Russia; 2015, pp. 115–117. (In Russian).
5. Iliushin A.A. Plasticity. Vol. 1. Elastic-plastic deformations. Moscow: Logos; 2004. (In Russian).
6. Iliushin A.A. Proceedings (1946–1966). Part 2. Plasticity / Compiled by E.A. Iliushina, M.R. Korotkina. Moscow: Fizmatlit; 2004. (In Russian).

Информация об авторах / Information about the authors

Дмитрий Юрьевич Русанов*, магистрант ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». Екатеринбург, Россия. e-mail: rusanovgt@gmail.com

Dmitrii Y. Rusanov*, master's student, FSAEI HE Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. Yekaterinburg, Russia. e-mail: rusanovgt@gmail.com

Сербин Сергей Андреевич, канд. техн. наук, доцент кафедры «Промышленное, гражданское строительство и экспертиза недвижимости» ФГАОУ ВО «Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». Екатеринбург, Россия. e-mail: Andrey-sergey.serbin@yandex.ru

Sergei A. Serbin, Cand. Sci. (Engineering), associate professor of the «Industrial, civil Engineering and real estate examination» FSAEI HE Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. Yekaterinburg, Russia e-mail: Andrey-sergey.serbin@yandex.ru

*Автор, ответственный за переписку / Corresponding author